Équations différentielles

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

AMIR TAVANGAR

eCampus Ontario

TABLE DES MATIÈRES

Transformée inverse de Laplace

Solutions en séries de puissances d'équations différentielles

Systèmes d'équations différentielle

Équations différentielles partielles

PRÉFACE

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les visualiser en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/equationsdifferentielles/?p=2146#oembed-1

À propos de ce manuel

Ce manuel libre d'accès a vocation à rendre l'étude des équations différentielles accessible et attrayante pour tous. Il s'agit d'une ressource principalement destinée aux étudiants et étudiantes en ingénierie, mais qui est aussi polyvalente et pourra être utile dans toutes les disciplines. C'est un outil complet, convenant aussi bien aux personnes débutantes qui abordent les équations différentielles pour la première fois qu'aux plus aguerries souhaitant une remise à niveau. Il ne cherche nullement à prouver des théorèmes ou dériver des formules, mais constitue plutôt un guide étape par étape pour la résolution d'équations différentielles.

Contenu et format

Chaque chapitre de ce manuel présente des concepts essentiels et fournit des exemples illustratifs avec des solutions détaillées. Ces exemples sont suivis de questions « Prenons un exemple » pour évaluer votre compréhension. Ces questions sont générées dynamiquement par MyOpenMath, ce qui permet de générer des questions similaires et de fournir un retour d'information immédiat pour faciliter votre processus d'apprentissage.

Incorporant des éléments interactifs tels que des vidéos, des problèmes dynamiques et des graphiques, le manuel est optimisé pour une visualisation sur le web via Pressbook. Cela autorise une interaction totale avec son contenu multimédia, depuis le visionnage de vidéos pédagogiques jusqu'à l'utilisation de graphiques dynamiques et d'ensembles de problèmes. Une version PDF téléchargeable est disponible, mais elle n'inclut pas les fonctions interactives du format web.

Financement

Ce projet a bénéficié du soutien et du financement du gouvernement de l'Ontario et du Consortium ontarien pour l'apprentissage en ligne (eCampusOntario). Les avis exprimés dans cette publication sont les avis de leur(s) auteur(s) et ne reflètent pas forcément celui du gouvernement de l'Ontario.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour le soutien et les contributions qui ont rendu cette ressource possible. Je remercie en tout premier lieu le gouvernement de l'Ontario et eCampusOntario, dont le financement et la foi en l'importance de l'accessibilité des ressources éducatives ont joué un rôle déterminant dans la réalisation de ce projet.

Je suis profondément reconnaissant au Dr Mohammad Reza Peyghami pour son expertise et ses commentaires avisés, qui ont été déterminants dans l'élaboration de cette ressource.

De même, je remercie tout particulièrement deux remarquables étudiants en ingénierie, Jazel Paco et Minh Khanh Truong, pour leur perspicacité et leur révision diligente, qui ont considérablement amélioré la qualité et la précision de ce travail.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude aux multiples scientifiques, mathématiciens et mathématiciennes, et éducateurs et éducatrices dont les travaux fondamentaux sous-tendent les concepts et les méthodes présentés dans cet ouvrage. Bien qu'il ne soit pas possible de citer individuellement toutes leurs contributions dans le texte, leurs efforts collectifs ont été indispensables. La section Bibliographie énumère les ressources clés qui ont contribué à façonner le contenu de cet ouvrage.

DÉCLARATION D'ACCESSIBILITÉ

La version Web de ce manuel est entièrement conforme aux exigences de la *Loi sur l'accessibilité pour les personnes handicapées de l'Ontario* et obéit aux règles pour l'accessibilité des contenus Web 2.0, normes de niveau AA. En outre, il est conforme à la liste de contrôle de l'accessibilité reproduite en Annexe A : Liste de contrôle de l'accessibilité de la Trousse à outils de l'accessibilité – 2e édition, ce qui garantit son respect des normes d'accessibilité les plus strictes.

Conçu pour être interactif, le manuel comprend des vidéos, des problèmes dynamiques, des graphiques et des simulations, ce qui le rend parfaitement adapté à l'apprentissage en ligne au moyen de Pressbook. Des fonctions d'accessibilité essentielles ont été intégrées dans la version Web afin de répondre aux divers besoins d'apprentissage :

- Le contenu est accessible aux utilisateurs et utilisatrices de lecteurs d'écran, ce qui améliore la navigabilité et la facilité d'utilisation.
- La navigation au clavier est prise en charge de bout en bout, ce qui permet de se déplacer facilement dans le contenu sans souris.
- Le formatage des liens, titres et tables est optimisé pour la compatibilité avec les lecteurs d'écran.
- Les équations mathématiques sont présentées en AsciiMath et rendues via MathJax pour garantir leur accessibilité. Le lecteur d'écran JAWS est recommandé pour une meilleure expérience d'accès à ces équations.
- Toutes les images sont accompagnées de descriptions complètes, fournies à l'aide d'un texte dans le contenu principal, d'un texte alternatif ou d'une description détaillée de l'image. Ces textes alternatifs étendus permettent de transmettre clairement toutes les informations visuelles aux utilisateurs de lecteurs d'écran.
- La couleur n'est pas utilisée comme unique moyen de transmission de l'information, ce qui garantit l'accessibilité du contenu aux utilisateurs souffrant de déficiences visuelles.
- Les contenus vidéo sont sous-titrés pour aider les utilisateurs et utilisatrices souffrant de déficiences auditives.
- L'option d'ajustement de la taille des polices est disponible pour les personnes souffrant de déficiences visuelles.
- Bien qu'une version PDF du manuel puisse être téléchargée, il convient de noter que ce format est dépourvu des éléments interactifs présents dans la version Web, qui jouent un rôle clé dans l'expérience d'apprentissage améliorée fournie par la ressource en ligne.

Grâce à cette approche holistique de l'accessibilité, tous les apprenants et apprenantes, quelles que soient leurs capacités physiques, peuvent s'engager efficacement et bénéficier du riche contenu éducatif fourni dans ce manuel.

INTRODUCTION

Description du chapitre

Ce chapitre présente une vue d'ensemble des concepts fondamentaux des équations différentielles ainsi qu'une introduction aux champs de direction pour les équations différentielles du premier ordre.

1.1 Introduction : cette section traite des définitions de base concernant les équations différentielles, y compris leur ordre, les différentes classifications et la nature de leurs solutions.

1.2 Champs de direction : Cette section présente brièvement les champs de direction, un outil permettant de représenter visuellement le comportement des solutions d'équations différentielles du premier ordre sans avoir besoin d'une formule de solution exacte.

Pionniers du progrès

Émilie du Châtelet est née à Paris en 1706. Femme d'une intelligence et d'une détermination exceptionnelles, elle a tracé sa propre voie dans le monde des sciences et des mathématiques à l'époque des Lumières, alors dominé par les hommes. En dépit de normes sociétales limitant l'accès des femmes à l'éducation formelle, Mme du Châtelet s'est formée aux mathématiques et à la physique, souvent par des moyens créatifs puisqu'elle n'hésitait pas à se travestir en homme pour assister à des conférences. Son œuvre la plus importante, une traduction et un commentaire des « Principia Mathematica » d'Isaac Newton, reste à ce jour la traduction française de référence. Elle y clarifie et développe les idées de Newton, notamment en élucidant le principe de conservation de l'énergie. Les travaux d'Émilie du Châtelet ont jeté les bases des développements futurs en physique et en mathématiques, notamment dans le domaine des équations différentielles. La ténacité et l'intelligence de cette autrice ont brisé les contraintes de son époque, ouvrant la voie aux futures générations de femmes dans la science, et son héritage continue d'inspirer et de remettre en question les normes de la communauté scientifique.

Émilie du Châtelet (1706 – 1749). Source : Maurice Quentin de La Tour, domaine public, via Wikimedia Common.

1.1 INTRODUCTION

A. Définitions

Les équations différentielles (ED) sont des équations mathématiques qui décrivent la relation entre une fonction et ses dérivées, qu'il s'agisse de dérivées ordinaires ou de dérivées partielles. Dans sa forme la plus simple, l'équation différentielle décrit la vitesse à laquelle une quantité change en fonction de la quantité elle-même et de ses dérivées. Les équations différentielles constituent de puissants outils en mathématiques et en sciences, car elles permettent de modéliser un large éventail de phénomènes du monde réel dans diverses disciplines, notamment la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et bien d'autres. Voici quelques exemples d'équations différentielles.

- Croissance démographique fondamentale : $\frac{dP}{dt} = aP$
- Décroissance radioactive fondamentale : $\frac{dQ}{dt} = -kQ$
- Lois de refroidissement de Newton : $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$
- Deuxième loi du mouvement de Newton : $\frac{d^2y}{dx^2} = -g$
- Circuits RL : $L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$
- Circuits RLC : $L\frac{d^2I}{dt^2} + RI + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$
- Équation de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

B. Ordre des équations différentielles

L'**ordre d'une équation différentielle** est l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'équation. Par exemple, si la dérivée la plus élevée est une dérivée seconde, l'équation est du second ordre. Voici quelques exemples :

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0 \quad \textit{(Premier ordre)}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = -5x \quad \textit{(Second ordre)}$$

$$x^2y''' + xy = \cos x \quad \textit{(Troisième ordre)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \textit{(Second ordre)}$$

L'ordre d'une équation différentielle détermine souvent les méthodes employées pour la résoudre. L'ordre d'une équation différentielle est indépendant du type de dérivées impliquées, qu'il s'agisse de dérivées ordinaires ou partielles.

Tout au long de cet ouvrage, nous nous intéresserons principalement aux équations différentielles du premier et du second ordre. Comme vous le découvrirez, les méthodes employées pour résoudre des équations différentielles du second ordre peuvent souvent être facilement étendues aux équations d'ordre supérieur.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=5

C. Équations différentielles ordinaires et partielles

Si une équation comprend la dérivée d'une variable par rapport à une autre, par exemple $\frac{dy}{dt}$, alors la variable dont la dérivée est prise (en ce cas, y) est appelée variable dépendante. La variable par rapport à laquelle la dérivée est prise (ici, t) est appelée variable indépendante.

Une **équation différentielle ordinaire (EDO)** est une équation différentielle impliquant une fonction d'une variable indépendante et ses dérivées. Tous les exemples ci-dessus, à l'exception de l'équation de la chaleur, sont des équations différentielles ordinaires.

Une **équation différentielle partielle (EDP)** est une équation différentielle qui contient des fonctions inconnues à plusieurs variables et leurs dérivées partielles. Les EDP sont utilisées pour formuler des problèmes impliquant des fonctions de plusieurs variables.

Dans cet ouvrage, nous nous intéresserons avant tout aux équations différentielles ordinaires, qui impliquent des fonctions à variable unique. Nous n'aborderons les équations différentielles partielles que dans le dernier chapitre.

D. Équations différentielles linéaires et non linéaires

Une **équation différentielle linéaire** est une équation dans laquelle la variable dépendante y et ses dérivées apparaissent à la première puissance, ne sont pas multipliées ensemble et ne sont pas des arguments d'une autre fonction,par exemple $\sin(y)$ or $\ln(y')$. La forme générale d'une équation différentielle linéaire est la suivante :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

où y est la variable dépendante, x est la variable indépendante, $a_i(x)$ sont des fonctions de x (qui peuvent être constantes ou nulles) et $f(x)$ est une fonction de x.

Une **équation différentielle non linéaire** est une équation dans laquelle la variable dépendante ou ses dérivées apparaissent à une puissance supérieure à un, sont multipliées ensemble ou se présentent sous une forme qui n'est pas linéaire. Par exemple, $\frac{dy}{dx} + 3y^2 = 3x$ n'est pas linéaire puisque y^2 a une puissance de 2.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=5

E. Équations différentielles homogènes et non homogènes

Une équation différentielle est dite **homogène** si chacun de ses termes est une fonction de la variable dépendante et de ses dérivées. Concernant les équations différentielles linéaires, une équation est homogène si la fonction $f(x)$ à droite de l'équation est zéro.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Par exemple, l'équation linéaire $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ est homogène parce que tous ses termes sont des fonctions de y et de ses dérivées et que l'équation est égale à zéro.

Une équation différentielle est **non homogène** si elle comporte des termes qui ne sont pas uniquement des fonctions de la variable dépendante et ses dérivées. Avec les équations linéaires, cela signifie généralement qu'il existe une fonction non nulle du côté de l'équation. Par exemple, l'équation linéaire $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = xe^x$ n'est pas homogène à cause de la présence du terme xe^x, qui est une fonction de la variable indépendante x .

F. Solutions

Une **solution** d'équation différentielle est une fonction qui satisfait l'équation sur un intervalle ouvert. Cela signifie que, lorsque la fonction et ses dérivées sont introduites dans l'équation différentielle, l'équation est vraie pour toutes les valeurs de l'intervalle. Il y a souvent un ensemble de solutions.

Exemple 1.1.1 : Vérification de solution

Vérifiez si $y = \sin(2x) + x^2$ est une solution de $y'' + 4y = 2 + 4x^2$.

Afficher/Masquer la solution

Tout d'abord, nous trouvons y'' puisque cela apparaît dans l'équation :

$y' = 2\cos(2x) + 2x$ $\to$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »>

$$y'' = -4\sin(2x) + 2.$$

En remplaçant y'' et y du côté gauche de l'équation, on obtient

$$\text{côté gauche:}$$

$$-4\sin(2x) + 2 + 4\sin(2x) + 4x^2$$
$$= 2 + 4x^2$$

qui est égal au côté droit de l'équation. Puisque y satisfait l'équation, il s'agit d'une solution à l'équation.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=5

Prenons maintenant l'équation différentielle $y' = 3x^2$. On peut facilement résoudre cette équation en intégrant :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$
$$dy = 3x^2 dx$$
$$\int dy = \int 3x^2 dx$$
$$y = x^3 + C$$

$y = x^3 + C$, où C est une constante arbitraire, représentant une famille de solutions à l'équation différentielle donnée. Chaque valeur distincte de C donne une solution particulière unique, montrant comment diverses conditions initiales peuvent être satisfaites. Cette famille de solutions, qui recoupe toutes les solutions possibles grâce à l'inclusion de la constante arbitraire C, est ce que l'on appelle la **solution générale** de l'équation différentielle.

Une solution explicite exprime explicitement la variable dépendante en fonction de la ou des variable(s) indépendante(s). Par exemple, $y = x^3 + C$ est une **solution explicite**. Par ailleurs, une **solution implicite** peut ne pas exprimer directement la variable dépendante, mais satisfait néanmoins l'équation différentielle. Par exemple, $y^2 + x^2 = C$. Il faut savoir qu'il n'est pas toujours possible de trouver une solution explicite.

G. Conditions initiales

Les **conditions initiales** renvoient aux valeurs spécifiées pour la variable dépendante et éventuellement ses dérivées en un point spécifique. Les conditions initiales permettent de déterminer la **solution spécifique (ou particulière)** d'une équation différentielle à partir de la solution générale, qui comporte normalement des constantes arbitraires. Par exemple, $y(t_0) = y_0$ dit que, à l'instant t_0, la valeur de y est y_0. Le nombre de conditions initiales requises pour une équation différentielle donnée dépend de l'ordre de l'équation différentielle. En général, une équation différentielle d'ordre nth nécessite des n conditions initiales. Ces conditions spécifient les valeurs de la fonction et de ses dérivées jusqu'au $(n-1)th$ ordre en un point particulier. Par exemple, une équation différentielle de second ordre nécessite deux conditions initiales. Il s'agit souvent de la valeur de la fonction et de la valeur de la première dérivée en un point spécifié.

Un **problème de valeur initiale (PVI)** est une équation différentielle avec une ou plusieurs condition(s) initiale(s) qui donne(nt) une solution particulière. Une solution peut ne pas être valable pour tous les nombres réels – il existe un « intervalle de validité », le domaine de la solution.

Exemple 1.1.2 : Problème de valeur initiale

$y' = 3x^2, y(1) = 2$ est un problème de valeur initiale, où $x = 1$ et $y = 2$ peuvent être substitués dans la solution générale de $y = x^3 + C$ pour trouver C, ce qui donne une solution particulière de $y = x^3 + 1$.

1.2 CHAMPS DE DIRECTION

S'il est certes utile de disposer d'une formule explicite pour la solution d'une équation différentielle afin de comprendre la nature de la solution, de déterminer où elle augmente ou diminue et d'identifier ses valeurs maximales ou minimales, il est souvent impossible de trouver une telle formule pour la plupart des équations différentielles du monde réel. Par conséquent, d'autres méthodes doivent être employées pour répondre à ces questions. Une approche efficace pour visualiser la solution d'une équation différentielle du premier ordre consiste à créer un champ de direction pour l'équation. Cette méthode donne une représentation graphique du comportement de la solution sans nécessiter de formule explicite.

Supposons que l'équation différentielle du premier ordre $y' = f(x, y)$ a des solutions. Pour cette équation, la fonction $f(x, y)$ donne la pente de la courbe de la solution en n'importe quel (x, y) du plan XY. Dans un champ de direction, ces pentes sont représentées par de petits segments de droite ou des flèches, tracés en un certain nombre de points du plan. Chaque segment a une pente égale à la valeur de $f(x, y)$ en ce point.

Exemple 1.2.1 : Calcul de VC

Pour l'équation $\frac{dy}{dx} = x + y$, le graphique de la solution traversant le point $(-1, 3)$ doit avoir une pente de $\frac{dy}{dx} = -1 + 3 = 2$.

La solution générale de l'équation est $y = -x - 1 + Ce^{x}$. Le champ de direction et certaines des solutions de l'équation pour différentes valeurs de la constante C sont représentés dans la figure 1.2.1.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=89

Figure 1.2.1 Champs de direction et solutions de $y' = x + y$

Les flèches dans les champs de direction représentent les tangentes aux solutions réelles des équations différentielles. Ces flèches peuvent être utilisées comme guides pour dessiner les graphiques des solutions de l'équation différentielle, de façon à obtenir une représentation visuelle du comportement des solutions. En suivant ces flèches, la trajectoire d'une solution peut être visuellement tracée dans le temps, de façon à indiquer son comportement à long terme.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Description du chapitre

Ce chapitre traite des équations différentielles du premier ordre, essentielles en science et en ingénierie pour modéliser les taux de changement dans de nombreux phénomènes. Il couvre leur structure, les techniques de résolution et les applications concrètes dans des domaines tels que la dynamique des populations, les processus thermiques et les circuits électriques.

2.1 Équations différentielles séparables du premier ordre : cette section aborde les équations différentielles séparables, une catégorie d'équations du premier ordre dont chacune des variables peut être séparée sur différents côtés de l'équation.

2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre : cette section aborde la résolution d'équations linéaires non homogènes du premier ordre.

2.3 Équations différentielles exactes : cette partie explique les critères qu'une équation doit remplir pour être exacte et présente les méthodes permettant de résoudre ces équations.

2.4 Facteurs intégrants : cette section explique les techniques consistant à utiliser des facteurs intégrants pour transformer une équation non exacte en une équation exacte qui peut être résolue.

2.5 Applications d'équations différentielles du premier ordre : cette dernière section illustre l'utilisation d'équations du premier ordre dans la modélisation de la croissance et de la décroissance, du mélange de substances, des changements de température, du mouvement sous l'effet de la pesanteur et du comportement de circuits.

Pionniers du progrès

Mary Cartwright (1900-1998) Source : Anitha Maria S, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons

Mary Cartwright, née en 1900 à Aynho, dans le Northamptonshire, en Angleterre, était une mathématicienne pionnière à une époque où les femmes universitaires étaient rares. Son parcours en mathématiques a commencé à l'université d'Oxford, puis l'a conduite à Cambridge, où elle s'est d'abord intéressée à l'analyse classique. Cependant, c'est au cours de la Seconde Guerre mondiale, alors qu'elle étudiait le problème des ondes radio et de leurs interférences, que Mary Cartwright a fait une découverte révolutionnaire. En collaboration avec J.E. Littlewood, elle s'est penchée sur les équations différentielles non linéaires et leurs travaux ont jeté les bases de ce que l'on appellera plus tard la théorie du chaos. L'incursion de Mary Cartwright dans ce domaine a donné lieu à des résultats déterminants, notamment le théorème de Cartwright-Littlewood et son étude de l'oscillateur de Van der Pol, un concept capital pour la compréhension des systèmes oscillatoires. Ses contributions extraordinaires n'ont pas seulement fait progresser le domaine des mathématiques, mais ont également brisé les barrières entre les sexes, créant ainsi un précédent pour les femmes dans les STIM. La vie de Mary Cartwright a été un mélange de rigueur intellectuelle et de résilience tranquille, laissant derrière elle un héritage qui continue d'encourager les mathématiciens, et en particulier les mathématiciennes, à explorer et à repousser les limites de la connaissance mathématique.

2.1 ÉQUATIONS SÉPARABLES

Les équations séparables, ou équations à variables séparables, sont un type d'équations différentielles du premier ordre qui peuvent être réarrangées de manière à ce que tous les termes impliquant une variable se trouvent d'un côté de l'équation et que tous les termes impliquant l'autre variable se trouvent du côté opposé. Cette caractéristique les rend plus faciles à résoudre que d'autres types d'équations différentielles. Ces équations représentent souvent des relations non linéaires.

La compréhension et l'application des techniques d'intégration sont cruciales pour la résolution des équations séparables. Il est donc recommandé de se familiariser avec les méthodes d'intégration classiques avant de tenter de résoudre ces équations.

Solution d'équation différentielle séparable

Une équation différentielle du premier ordre est dite **séparable** si elle peut être écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$$

où $g(x)$ est une fonction de x uniquement et $p(y)$ est une fonction de$y$ uniquement. Le côté droit est un produit de ces deux fonctions, ce qui permet la séparation des variables.

Par exemple, l'équation $y' = \dfrac{x^2 + x^2y}{y^2}$ est séparable car elle peut être factorisée et écrite sous la forme $\dfrac{dy}{dx} = x^2\left(\dfrac{1+y}{y^2}\right) = g(x)p(y)$. En revanche, l'équation $y' = 2 - x^2y$ n'est pas séparable car le côté droit ne peut pas être factorisé en un produit des fonctions de x et y.

Comment résoudre des équations séparables

Pour résoudre l'équation $\dfrac{dy}{dx} = g(x)p(y)$,

1. Séparer les variables : multiplier les deux côtés par dx et par $h(y) = \dfrac{1}{p(y)}$ $\rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $h(y)dy = g(x)dx$
2. Intégrer les deux côtés : $\displaystyle\int h(y)dy = \int g(x)dx$ $\rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $H(y) = G(x) + C$ où C est la constante fusionnée d'intégration.
3. Trouver la valeur de y : si possible, résoudre l'équation obtenue pour y afin d'obtenir la solution

explicite. Certaines solutions ne peuvent pas être réarrangées et résolues pour y, de sorte que la forme implicite obtenue à l'étape 2 peut être la solution finale.

Regarder la vidéo

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=138#oembed-1

Exemple 2.1.1 : Résoudre une équation séparable

Résoudre l'équation non linéaire

$$y' = \frac{x+4}{y^2}.$$

Afficher/Masquer la solution

1. En multipliant les deux côtés par dx et y^2, on obtient

$$y^2 dy = (x+4)dx$$

2. En intégrant les deux côtés, on obtient

$$\int y^2 dy = \int (x+4)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + 4x + C_1$$

3. En multipliant par 3 et en prenant la racine cubique des deux côtés, on obtient

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} + 12x + 3C_1\right)^{1/3}$$

En substituant la constant e$C_2 = 3C_1$, on obtient la solution explicite

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} + 12x + C_2\right)^{1/3}$$

Exemple 2.1.2 : Résoudre une équation séparable

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = 6y\tan^2(2x)\,.$$

Afficher/Masquer la solution

Il s'agit d'une équation différentielle séparable car elle peut être exprimée sous la forme $h(y)dy = g(x)dx$.

1. En multipliant les deux côtés par dx et $\frac{1}{y}$, on obtient

$$\frac{1}{y}dy = 6\tan^2(2x)dx$$

2. En intégrant les deux côtés, on obtient

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 6\tan^2(2x)dx$$

$$\ln|y| = 3\tan(2x) - 6x + C_1$$

3. Par l'exponentiation des deux côtés, on obtient

$$y = C_2 e^{3\tan(2x) - 6x} \quad \text{where } C_2 = e^{C_1}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=138

Pour résoudre des équations différentielles non linéaires, il est essentiel de prendre en compte l'**intervalle de validité**, c'est-à-dire la plage de la variable indépendante, généralement x, où la solution est définie et se comporte comme il se doit. Cet intervalle est essentiel car les solutions d'équations non linéaires peuvent ne pas être valides pour toutes les valeurs x en raison de problèmes potentiels tels que la division par zéro, des logarithmes non définis de nombres non positifs et d'autres opérations indéfinies.

En outre, du fait de la nature des équations non linéaires, certaines conditions initiales peuvent conduire à l'absence de solution ou à des solutions multiples, ce qui souligne la nécessité de sélectionner et de vérifier soigneusement la plage de x sur laquelle la solution peut être appliquée. L'intervalle de validité n'est pas toujours immédiatement apparent à partir de l'équation elle-même et dépend souvent à la fois de la forme spécifique de la solution et des conditions initiales.

Exemple 2.1.3 : Résoudre une équation séparable avec condition initiale

Résoudre le problème de valeur initiale

$$y' = 14xy - 2x\,, \quad y(0) = 4.$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution générale :

Après avoir factorisé $2x$ dans le côté droit, l'équation peut être exprimée sous la forme $h(y)dy = g(x)dx$.

$$\frac{dy}{dx} = 2x(7y - 1)$$

1. En multipliant les deux côtés par dx et $\frac{1}{7y-1}$, on obtient

$$\frac{dy}{7y-1} = 2xdx$$

2. En intégrant les deux côtés, on obtient

$$\int \frac{dy}{7y-1} = \int 2xdx$$
$$\frac{1}{7}\ln|7y-1| = x^2 + C_1$$

3. En multipliant par 7 et en exponialisant les deux côtés, on obtient

$$7y - 1 = e^{7x^2 + 7C_1}$$

En réarrangeant l'équation et en substituant $C_2 = e^{7C_1}$, on obtient la solution explicite

$$y = \frac{1}{7}\left(C_2 e^{7x^2} + 1\right)$$

Appliquer la condition initiale :

$$y(0) = 4$$
$$\frac{1}{7}\left(C_2 e^0 + 1\right) = 4$$
$$C_2 + 1 = 28$$
$$C_2 = 27$$

La solution du PVI est donc

$$y = \frac{1}{7}\left(27e^{7x^2} + 1\right)$$

Il n'y a pas de restriction sur le domaine de y, de sorte que la solution est valide sur $(-\infty, \infty)$.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=138

Exemple 2.1.4 : Résoudre une équation séparable avec condition initiale

Résoudre le problème de valeur initiale et trouver l'intervalle de validité de la solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y^2}{\sqrt{x}}, \quad y(4) = \frac{1}{35}.$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution générale :

Il s'agit d'une équation différentielle séparable car elle peut être exprimée sous la forme $h(y)dy = g(x)dx$.

1. En multipliant les deux côtés par dx et $\frac{1}{y^2}$, on obtient

$$\frac{1}{y^2}\,dy = \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx$$

2. En intégrant les deux côtés, on obtient

$$\int y^{-2}\,dy = 5\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$-y^{-1} = 10x^{\frac{1}{2}} + C$$

3. En multipliant par -1 et en prenant la réciproque de deux côtés, on obtient la solution explicite

$$y = -\frac{1}{10\sqrt{x}+C}$$

Appliquer la condition initiale :

$$\begin{aligned} y(4) &= \frac{1}{35} \\ -\frac{1}{10\sqrt{4}+C} &= \frac{1}{35} \\ -\frac{1}{20+C} &= \frac{1}{35} \\ 20+C &= -35 \\ C &= -55 \end{aligned}$$

La solution du PVI est donc

$$y = -\frac{1}{10\sqrt{x}-55}$$

Trouver l'intervalle de validité :

Pour établir l'intervalle de validité de la solution, il faut prendre en considération deux contraintes :

1. L'expression contenue dans une racine carrée doit être positive. Par conséquent, le terme sous la racine carrée, x, doit être supérieur ou égal à 0 ($x \geq 0$=0″ title= »x>=0″ class= »asciimath mathjax »>).
2. Le dénominateur de toute fonction rationnelle ne doit pas être égal à zéro afin d'éviter les expressions indéfinies. Étant donné $10\sqrt{x} - 55 \neq 0$, cela implique que $x \neq \pm 30{,}25$.

L'intervalle de validité est la plage des valeurs de x qui satisfont les deux conditions : $[0, 30{,}25) \cup (30{,}25, \infty)$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=138

Section 2.1 Exercices

1. Résous l'équation différentielle : $\dfrac{dy}{dx} = 4\cos(3x)\sqrt{1-y^2}$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$y(x) = \sin\left(\frac{4}{3}\sin(3x) + C\right)$$

2. Résous l'équation différentielle. Exprime y explicitement en fonction de x.

   $$\frac{dy}{dx} = 4e^{5x}e^{4y}$$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$y(x) = -\frac{1}{4}\ln\left|-\frac{16}{5}e^{5x} + C\right|$$

3. Résous le problème de valeur initiale : $y' = 4xy - 2x, \quad y(0) = 3$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$y(x) = \frac{5e^{2x^2} + 1}{2}$$

4. Résous le problème de valeur initiale et trouver l'intervalle de validité de la solution :
   $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2}{\sqrt{x}}, \quad y(4) = \dfrac{1}{42}$

   Afficher/Masquer la réponse

$$y(x) = -\frac{1}{6\sqrt{x} - 54}$$

Intervalle de validité : $[0, 81) \cup (81, \infty)$

2.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Une équation différentielle du premier ordre est dite **linéaire** si elle peut être écrite sous la forme

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{2.2.1}$$

Une équation différentielle du premier ordre qui ne peut pas être exprimée sous cette forme est dite **non linéaire**. Si $q(x) = 0$, l'équation est dite **homogène.** En revanche, si $q(x)$ n'est pas égal à zéro, l'équation est ***non homogène***. Les équations homogènes ont toujours la **solution triviale** $y = 0$. Les solutions qui ne sont pas nulles sont des solutions **non triviales**.

Certaines équations peuvent ne pas paraître linéaires d'emblée, par exemple $x^3 y' + \ln(x)y = 2\sin(x)$, mais elles peuvent être réarrangées pour prendre une forme linéaire :

$$y' + \frac{\ln(x)}{x^3}y = \frac{2\sin(x)}{x^3}.$$

Théorème : Si $p(x)$ et $q(x)$ dans l'équation 2.2.1 sont continus sur un intervalle ouvert (a,b), alors il existe une formule unique $y = y(x,c)$ qui est la solution générale à l'équation différentielle.

Dans cet ouvrage, nous ne mentionnerons pas toujours explicitement l'intervalle (a,b) lorsque nous chercherons la solution générale d'une équation linéaire du premier ordre spécifique. Par défaut, cela implique que nous recherchons la solution générale sur chaque intervalle ouvert où les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ dans l'équation sont continues.

Pour résoudre l'équation 2.2.1, il faut d'abord supposer que la solution peut être exprimée sous la forme $y = vy_1$, où $y_1(x)$ est une solution connue à l'équation homogène correspondante (dite équation complémentaire) et $v(x)$ est une fonction inconnue que nous cherchons à déterminer. Cette approche fait partie d'une technique appelée variation des paramètres, qui est particulièrement utile pour trouver des solutions à des équations différentielles non homogènes. Nous étudierons cette technique plus en détail dans le contexte des équations différentielles du second ordre. En substituant la solution devinée à l'équation, on obtient

$$v'y_1 + y'_1 v + p(x)(vy_1) = q(x)$$

En simplifiant et en réarrangeant, on obtient

$$v'y_1 + v(y'_1 + p(x)y_1) = q(x)$$

Comme y_1 est une solution de l'équation complémentaire, $y'_1 + p(x)y_1 = 0$, en simplifiant l'expression à la forme $v'y_1 = q(x)$. L'intégration des deux côtés nous permet de déterminer $v(x) = \displaystyle\int \frac{q(x)}{y_1(x)}dx + C$, ce qui donne pour l'équation 2.2.1 la solution

$$y = vy_1$$

$$y(x) = y_1(x)\left[\int \frac{q(x)}{y_1(x)}dx + C\right]$$

Le terme $\dfrac{1}{y_1}$ est le facteur intégrant, représenté par $u(x)$, de sorte que la solution est souvent reformulée comme suit

$$y = \frac{1}{u(x)}\left[\int u(x)q(x)dx + C\right]$$

Tâchons ensuite de trouver y_1, la solution de l'équation homogène complémentaire

$$y' + p(x)y = 0$$

En réarrangeant cette équation sous une forme séparable $\frac{y'}{y} = -p(x)$ et en intégrant les deux côtés, on obtient

$$\ln(y) = -\int p(x)dx$$

ce qui donne $y_1 = e^{-\int p(x)dx}$. Par conséquent, $u(x)$, le facteur intégrant, est la réciproque de y_1, ce qui donne $u(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Maintenant que nous comprenons la dérivation de la solution, décrivons le processus de solution dans les étapes suivantes.

Comment résoudre des équations linéaires du premier ordre

1. Écrire l'équation sous sa forme standard.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

2. Calculer le facteur intégrant en laissant la constante d'intégration à zéro, par souci de commodité.

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

3. Intégrer le côté droit de l'équation et simplifier, dans la mesure du possible. Veiller à traiter correctement la constante de l'intégration.

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}\left[\int u(x)q(x)dx + C\right]$$

Parfois, la fonction $u(x)$ peut ne pas être directement intégrée. En ce cas, il faut conserver la fonction dans sa forme intégrale, plutôt que d'essayer de trouver une solution explicite.

Exemple 2.2.1 : Résoudre une équation linéaire

Trouver la solution générale de

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x\ ,\ \ x > 0$$0″ title= »x>0″ class= »asciimath mathjax »>

Afficher/Masquer la solution

1. Tout d'abord, il faut multiplier par x pour mettre l'équation sous sa forme standard :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2\cos x$$

Ainsi, $p(x) = -\frac{2}{x}$ et $q(x) = x^2\cos x$

2. Le facteur intégrant est donc

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2}$$

3. En substituant la formule générale, on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{u(x)}\left[\int u(x)q(x)dx + C\right] \\ &= \frac{1}{x^{-2}}\int x^{-2}.\, x^2\cos x dx \\ &= x^2\int \cos x dx \\ &= x^2(\sin x + C) \\ &= x^2\sin x + Cx^2 \end{aligned}$$

La figure 2.2.1 présente les esquisses des solutions pour différentes valeurs de la constante C pour l'exemple ci-dessus.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=2.2#oembed-144

Figure 2.2.1 Graphique de $y = x^2\sin x + Cx^2$ pour différentes valeurs de la constante C

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=2.2#oembed-144

Théorème – Existence et unicité des solutions : Si $p(x)$ et $q(x)$ sont continus sur (a, b), alors

a) La solution générale à l'équation non homogène est $y(x) = \dfrac{1}{u(x)}\left[\int u(x)q(x)dx + C\right]$

b) Si x_0 est un point arbitraire dans (a, b), alors le problème de valeur initiale a une solution unique sur (a, b)

Exemple 2.2.2 : Résoudre un problème de valeur initiale

Résoudre le problème initial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} + 4x^2 + 4x\,,\ \ y(1) = -6$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution générale :

1. Tout d'abord, il faut réarranger l'équation pour la mettre dans sa forme standard :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1} \cdot y = 4x^2 + 4x$$

Donc, $p(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ et $q(x) = 4x(x+1)$.

2. Le facteur intégrant est

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x+1}dx} = e^{-\ln|x+1|} = (x+1)^{-1}$$

3. En substituant la solution à la formule générale, on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{u(x)}\left[\int u(x)q(x)dx + C\right] \\ &= \frac{1}{(x+1)^{-1}}\int (x+1)^{-1}.\,4x(x+1)dx \\ &= (x+1)\int 4x dx \\ &= (x+1)\left(2x^2 + C\right) \end{aligned}$$

Appliquer la condition initiale pour trouver C :

$$\begin{gathered} y(1) = -6 \\ (1+1)\left(2\left(1^2\right) + C\right) = -6 \\ 2(2+C) = -6 \\ 2 + C = -3 \\ C = -5 \end{gathered}$$

La solution du PVI est donc

$$y(x) = (x+1)\left(2x^2 - 5\right)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=2.2#oembed-144

Section 2.2 Exercices

1. Trouve le facteur intégrant le plus simple $u(x)$ de l'équation $-xy' = (7x+5)y + x\sec(x)$.

   Afficher/Masquer la réponse

   $$u(x) = x^5 e^{7x}$$

2. Trouve la solution générale à l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{4x}$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$y(x) = \frac{1}{2}e^{4x} + Ce^{2x}$$

3. Trouve la solution générale à l'équation différentielle : $\frac{dy}{dt} - \frac{4}{t}y = t^5$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$y(t) = \frac{1}{2}t^6 + Ct^4$$

4. Résous le problème de valeur initiale : $xy' + 2y = 8x^2$ avec la condition initiale $y(1) = 3$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + 2x^4\right)$$

5. Résous le problème de valeur initiale : $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+1} + 4t^2 + 4t\,, \quad y(1) = 7$

   Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = \left(2t^2 + \frac{3}{2}\right)(t + 1)$$

2.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EXACTES

A. Introduction

Les **équations différentielles exactes** sont une catégorie d'équations différentielles du premier ordre qui peuvent être résolues avec une condition d'intégrabilité particulière. Cette section aborde les thèmes suivants : ce qui fait qu'une équation est exacte, comment vérifier cette condition et la méthodologie de résolution de ces équations.

Pour commencer, nous présentons un théorème fondamental, suivi d'un exemple illustrant son application. Ensuite, nous approfondissons le concept d'équations exactes et explorons une méthode pour les résoudre.

Théorème : si la fonction $F(x, y)$ a des dérivées partielles continues F_x et F_y, alors l'équation $F(x, y) = c$est une solution implicite à l'équation différentielle $F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy = 0$.

Ce théorème peut être prouvé en utilisant la différenciation implicite.

Exemple 2.3.1 : Trouver une solution à l'équation différentielle

Montrer que $x^2y^3 + xy^3 + 3xy = c$ est une solution implicite à l'équation différentielle donnée.

$$(2xy^3 + y^3 + 3y)dx + (3x^2y^2 + 3xy^2 + 3x)dy = 0$$

Afficher/Masquer la solution

Pour appliquer efficacement le théorème, il faut définir $F(x, y)$ comme la fonction donnée dans la solution. Ensuite, il faut montrer que les termes multipliés par dx et dy sont, respectivement, les dérivées partielles F_x et F_y de F par rapport à x et y. Ce processus consiste à trouver ces dérivées partielles et à confirmer qu'elles correspondent aux termes respectifs de l'équation différentielle donnée.

En laissant $F(x, y) = x^2y^3 + xy^3 + 3xy$, on obtient ses dérivées partielles :

$$F_x = 2xy^3 + y^3 + 3y$$
$$F_y = 3x^2y^2 + 3xy^2 + 3x$$

Nous observons que F_x et F_y sont équivalents aux expressions multipliées pardx et dy dans l'équation, respectivement, ce qui confirme que $F(x, y) = c$ est la solution à l'équation différentielle donnée.

$$\underbrace{(2xy^3 + y^3 + 3y)}_{F_x}dx + \underbrace{(3x^2y^2 + 3xy^2 + 3x)}_{F_y}dy = 0$$

B. Solution d'équations exactes

Nous allons maintenant nous concentrer sur une compréhension plus large des équations différentielles exactes. Considérons une équation différentielle exprimée sous la forme

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

qui peut aussi être représentée sous la forme

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Une équation de cette forme est dite **exacte** s'il y a une fonction $F(x, y)$ telle que ses dérivées partielles F_x et F_y correspondent à $M(x, y)$ et $N(x, y)$, respectivement. En l'absence d'une telle fonction , $F(x, y) = c$ représente une solution à l'équation différentielle.

Par exemple, les équations $4xy^2dx - 7x^3ydy = 0$ et $5y\sin x - xy\cos x\frac{dy}{dx} = 0$ sont des exemples d'équations de forme exacte.

Les questions à se poser maintenant sont donc les suivantes :

1. Comment déterminer si une équation différentielle donnée est exacte?
2. Si elle est exacte, comment trouver la fonction $F(x, y)$ et, par conséquent, une solution?

Pour ce qui est de la première question, supposons que l'équation différentielle donnée est exacte, d'où l'existence d'une fonction $F(x, y)$ avec des dérivées partielles F_x et F_y qui correspondent à $M(x, y)$ et $N(x, y)$, respectivement. Si F et ses dérivées partielles M et N sont continues, alors les dérivées partielles secondes de F doivent être égales à :

$$F_{xy} = F_{yx}$$

ou, de manière équivalente,

$$M_y = N_x$$

Cette relation est résumée dans le théorème ci-dessous.

1) Test d'exactitude

Théorème. Supposons que les dérivées premières de $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont continues dans une région rectangulaire $\mathbb{R}$. L'équation différentielle

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

est donc exacte dans $\mathbb{R}$ si et uniquement si la condition suivante est satisfaite pour tous les (x, y) dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

Pour ce qui est de la seconde question sur la résolution d'une équation différentielle exacte, il faut suivre la procédure ci-dessous.

2) Méthode de résolution d'équations exactes

1*. Trouver $F(x, y)$: si l'équation est exacte, alors $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M$. Intégrer cette équation par rapport à x pour trouver une partie de F. Il ne faut pas oublier d'inclure une fonction arbitraire de l'autre variable, en l'occurrence y.

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$$

2. Déterminer la fonction arbitraire :

a. Pour trouver $g(y)$,il faut d'abord déterminer F_y à partir de l'expression obtenue pour F(x,y) à l'étape 1. Comme F_y doit être égal à $N(x, y)$ à partir de l'équation différentielle exacte, il faut définir F_y comme étant égal à $N(x, y)$ et trouver la valeur de $g'(y)$.

b. Après avoir isolé $g'(y)$, il faut l'intégrer par rapport à y pour obtenir $g(y)$. Définir la constante d'intégration sur zéro. Remplacer le $g(y)$ déterminé dans l'expression de $F(x, y)$ afin de terminer.

3. Formuler la solution générale : La solution de $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ est donnée implicitement (sans solution pour y) par

$$F(x, y) = C$$

où C est une constante. L'équation représente la famille de courbes qui sont des solutions de l'équation différentielle.

*Remarque : à titre d'alternative, on peut aussi commencer par intégrer $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N$ par rapport à y, puis suivre les mêmes étapes pour trouver $F(x, y)$ si l'intégration semble plus facile.

Exemple 2.3.2 : Résoudre une équation exacte

Déterminer si l'équation est exacte et, si tel est le cas, trouve la solution : $3y^3\,dx + 9xy^2\,dy = 0$

Afficher/Masquer la solution

1) Test d'exactitude :

$M = 3y^3$ $\rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 9y^2$

$N = 9xy^2$ $\rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $\dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 9y^2$

Comme $M_y = N_x$, l'équation est exacte.

2) Trouver la solution :

1. Nous savons que $F_x = M = 3y^3$. Nous intégrons par rapport à x:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int 3y^3\,dx + g(y) \\ &= 3xy^3 + g(y) \end{aligned}$$

2a. Pour trouver $g(y)$, il faut prendre la dérivée partielle de F ci-dessus par rapport à y:

$$F_y = 9xy^2 + g'(y)$$

Comme F_y doit être égal à $N(x, y) = 9xy^2$ à partir de l'équation différentielle exacte, il faut définir F_y comme étant égal à $N(x, y)$ trouver la valeur de $g'(y)$ou le déterminer par comparaison.

En comparant, nous déterminons que $g'(y) = 0$.

2b. En intégrant $g'(y)$ par rapport à y, on obtient $g(y) = C$. En définissant la constante d'intégration sur zéro, on obtient $g(y) = 0$, soit $F = 3xy^3$.

3. Ainsi, l'équation différentielle a pour solution implicite

$$3xy^3 = C$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=146

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=146

Exemple 2.3.3 : Résoudre une équation exacte avec condition initiale

a) Résous le problème de valeur initiale et trouver la solution explicite $y = f(x)$. **b)** Déterminer l'intervalle de validité.

$$(3y^3 - 1)e^x dx + 9y^2(e^x - 3)dy = 0, \quad y(0) = 2$$

Afficher/Masquer la solution

a)

1) Test d'exactitude :

$$M = \left(3y^3 - 1\right)e^x \quad \rightarrow$$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »>

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 9y^2 e^x$$

$$N = 9y^2(e^x - 3) \quad \rightarrow$$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »>

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 9y^2 e^x$$

Comme $M_y = N_x$, l'équation est exacte.

2) Trouver la solution générale :

Nous avons l'option d'intégrer M par rapport à x ou d'intégrer N par rapport à y. Comme les deux intégrales sont aussi simples l'une que l'autre, nous intégrons N par rapport à y pour varier les choses, en veillant à donner des exemples des deux méthodes.

1.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$F(x, y) = \int 9y^2(e^x - 3)dy + h(x)$$

$$= 3y^3(e^x - 3) + h(x)$$

Il importe d'inclure une fonction arbitraire de x, $h(x)$, puisque, cette fois, nous intégrons par rapport à y.

2a. Pour trouver $h(x)$, il faut prendre la dérivée partielle de F ci-dessus par rapport à x:

$$F_x = 3y^3 e^x + h'(x)$$

Comme F_x doit être égal à $M(x, y) = \left(3y^3 - 1\right)e^x$ à partir de l'équation différentielle exacte, il faut définir F_x comme étant égal à $M(x, y)$, puis trouver la valeur de $h'(x)$ ou la déterminer par comparaison.

$$F_x = M(x, y)$$

$$3y^3 e^x + h'(x) = \left(3y^3 - 1\right)e^x$$

$$h'(x) = -e^x$$

2b. En intégrant $h'(x)$ par rapport à x, on obtient$h(x) = -e^x + C_1$. En définissant la constante d'intégration sur zéro, on a $h(x) = -e^x$. Par conséquent,

$$F(x, y) = 3y^3(e^x - 3) - e^x$$

3. Ainsi, l'équation différentielle a pour solution implicite

$$3y^3(e^x - 3) - e^x = C$$

Appliquer la condition initiale :

$$y(0) = 2$$
$$3(2^3)(e^0 - 3) - e^0 = C$$
$$24(1 - 3) - 1 = C$$
$$C = -49$$

La solution du PVI est donc

$$3y^3(e^x - 3) - e^x = -49$$

Comme nous devons trouver la solution explicite, nous réarrangeons l'équation afin de trouver la valeur de y :

$$3y^3(e^x - 3) = e^x - 49$$
$$y^3 = \frac{e^x - 49}{3(e^x - 3)}$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{e^x - 49}{3(e^x - 3)}}$$

b) Trouver l'intervalle de validité :

Pour établir l'intervalle de validité de la solution, nous devons nous assurer que le dénominateur de la fonction rationnelle n'est pas égal à zéro afin d'éviter les expressions indéfinies :

$$e^x - 3 \neq 0$$
$$x \neq \ln(3)$$

L'intervalle de validité pour la solution est donc $(-\infty, \ln(3)) \cup (\ln(3), \infty)$.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=146

Section 2.3 Exercices

1. Détermine si l'équation est exacte et, si tel est le cas, trouve la solution :
$$-xy^2 - 4xy + \left(-x^2y - 2x^2 + 3\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

   Afficher/Masquer la réponse

$$-\frac{1}{2}x^2y^2 - 2x^2y + 3y = C$$

2. Résous l'équation différentielle : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-10e^x\cos(y) - 3\frac{y^2}{x}}{-10e^x\sin(y) + 6y\ln(x) + 2y^2}$.

   Afficher/Masquer la réponse

$$10e^x\cos(y) + 3y^2\ln(x) + \frac{2}{3}y^3 = C$$

3. Résous le problème de valeur initiale. Donne la solution explicite :
$\left(2y^3 - 1\right)e^x dx + 6y^2(e^x + 3)dy = 0, y(0) = -2.$

   Afficher/Masquer la réponse

$$y = \left(\frac{e^x - 65}{2e^x + 6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2.4 FACTEURS INTÉGRANTS

Face à une équation différentielle du premier ordre non exacte, la méthode des facteurs intégrants fournit un moyen systématique de la transformer en une équation exacte qui peut être résolue. Cette section explore les techniques d'utilisation des facteurs intégrants pour résoudre les équations différentielles.

Parfois, une équation différentielle qui n'est pas exacte au départ peut être transformée en une équation exacte en la multipliant par une fonction appropriée, $\mu(x, y)$. Prenons l'équation

$$(3x + 2y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Elle n'est pas exacte parce que $M_y = 4y$ et $N_x = 2y$ ne correspondent pas. Or, si on multiplie l'équation tout entière par une fonction $\mu(x) = x$, elle devient

$$(3x^2 + 2xy^2)dx + 2x^2ydy = 0.$$

Cette équation est maintenant exacte, puisque $M_y = N_x = 4xy$. Cette équation modifiée peut alors être résolue par les méthodes d'équation exacte évoquées à la section 2.3.

La fonction $\mu(x, y)$ est un **facteur intégrant** pour l'équation si, lorsqu'elle est multipliée par l'équation, elle donne une équation exacte. En termes formels, si la multiplication de l'équation différentielle par $\mu(x, y)$, comme dans

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0,$$

la rend exacte, alors $\mu(x, y)$ est le facteur intégrant.

Méthode pour trouver le facteur intégrant spécial

Lorsque vous tombez sur une équation différentielle du premier ordre sous la forme $Mdx + Ndy = 0$ qui n'est ni séparable, ni linéaire, vous pouvez tout de même la résoudre en trouvant un facteur intégrant spécial. Suivre ces étapes :

1. Calculer les dérivées partielles : Calculer M_y et N_x .
2. Tester l'exactitude :

- Si $M_y = N_x$, alors l'équation est déjà exacte, aucun facteur intégrant n'est nécessaire.
- Si $M_y \neq N_x$, l'équation n'est pas exacte, il faut trouver un facteur intégrant.

3. Trouver un facteur intégrant spécial :

- Calculer l'expression $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ (i). Si (i) est une fonction de x uniquement, alors un facteur intégrant est donné par $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$.

- Si (i) n'est pas une fonction de x uniquement, calculer l'expression $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ (ii). Si (ii) est une fonction de y uniquement, alors un facteur intégrant est donné par $\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$.

4. Appliquer le facteur intégrant : Multiplier l'équation tout entière par le facteur intégrant μ de façon à la transformer en équation exacte.

5. Résoudre l'équation exacte : Une fois que l'équation est exacte, il faut la résoudre au moyen de la méthode présentée à la section 2.3 pour les équations exactes.

Exemple 2.4.1 : Résoudre une équation au moyen de facteurs intégrants

Résoudre $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$

Afficher/Masquer la solution

Un rapide contrôle montre que l'équation n'est ni séparable, ni linéaire, ni exacte. Il faut donc vérifier s'il existe un facteur intégrant spécial :

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = -\frac{2}{x}$$

Puisque (i) est la fonction de x uniquement, un facteur intégrant est donné par

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \\ &= e^{\int -\frac{2}{x} dx} \\ &= x^{-2}\end{aligned}$$

En multipliant $\mu(x) = x^{-2}$ par l'équation différentielle originale, on obtient l'équation exacte

$$(2 + yx^{-2})dx + (y - x^{-1})dy = 0$$

En résolvant l'équation par la méthode exacte, on obtient la solution implicite

$$2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=148

Section 2.4 Exercices

1. Trouve un facteur intégrant pour l'équation suivante :
   $(xy + x + 2y + 1)dx + (x + 1)dy = 0$

   Afficher/Masquer la réponse

   $\mu(x) = e^x$

2. Pour l'équation différentielle donnée, **a)** détermine le facteur intégrant et **b)** trouve une solution générale.

   $$(4x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$$

   Afficher/Masquer la réponse

   a) $\mu(x) = x^{-2}$
   b) $4x - yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2 = C$

3. Résous l'équation différentielle : $(4x^2 - y)dx + (-4x^2y + x)dy = 0$

   Afficher/Masquer la réponse

$$4x + yx^{-1} - 2y^2 = C$$

4. Pour l'équation différentielle donnée, **a)** détermine le facteur intégrant et **b)** trouve une solution générale.

$$y\sin(y)dx + x(\sin(y) - y\cos(y))dy = 0$$

Afficher/Masquer la réponse

a) $\mu(y) = \dfrac{y}{\sin(y)}$

b) $\dfrac{xy}{\sin(y)} = C$

2.5 APPLICATIONS D'EDO DU PREMIER ORDRE

A. Introduction

La modélisation mathématique est le processus qui consiste à traduire des problèmes du monde réel en langage mathématique. Il s'agit de formuler, de développer et de tester rigoureusement des modèles pour représenter et résoudre des problèmes complexes. Les équations différentielles, qu'elles soient ordinaires ou partielles, jouent un rôle essentiel dans ces modèles. Elles relient une fonction à ses dérivées, qui représentent les taux de changement. Elles sont donc particulièrement adaptées à la modélisation de systèmes dynamiques pour lesquels il est essentiel de comprendre l'évolution des choses.

Dans cette section, nous allons voir comment les équations différentielles du premier ordre sont appliquées dans divers domaines, notamment les processus de croissance et de décroissance, le mélange de substances, la loi de refroidissement de Newton, la dynamique de la chute d'objets et l'analyse des circuits électriques.

B. Croissance et décroissance démographique

L'une des applications les plus courantes des équations différentielles du premier ordre est la modélisation de la croissance ou de la décroissance démographique. Les modèles permettent de comprendre comment les populations évoluent dans le temps en raison des naissances, des décès, de l'immigration et de l'émigration. Le modèle de croissance démographique le plus simple est le modèle de croissance exponentielle, qui suppose un environnement aux ressources illimitées. Il est représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

où P est la taille de la population, et r est la constante de proportionnalité. La solution de cette équation différentielle séparable est

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

où P_0 est la population initiale à l'instant $t = 0$.

Si <span class= »AM » title= »r$r < 0$, la population décroît exponentiellement et si $r > 0$0″ title= »r>0″ class= »asciimath mathjax »>, la population croît exponentiellement. Ce modèle implique que la population croît continuellement et sans limites, ce qui n'est démographiquement guère réaliste à long terme compte tenu des limitations de ressources, d'espace, etc. Toutefois, il s'agit d'une bonne approximation pour les populations ne présentant pas de contraintes significatives en matière de ressources ou pour les prévisions à court terme.

Lorsqu'il s'agit de problèmes où les taux d'entrée et de sortie de population d'une région sont différents, il est essentiel de comprendre que le taux global de variation de la population est le résultat de la différence entre le taux d'entrée de la population (immigrations ou naissances) et le taux de sortie de la population (émigrations ou décès). Ce taux peut être représenté sous la forme d'une équation différentielle qui modélise la variation nette de la population au fil du temps. L'approche générale consiste à établir une équation d'équilibre reflétant ces taux :

$$\frac{dP}{dt} = R_{\text{in}} - R_{\text{out}}$$

Ici, R_{in} est le taux auquel la population entre dans la région et R_{out} est le taux auquel la population quitte la région.

Exemple 2.5.1 : Variation démographique

Une population de poissons dans un lac croît à un rythme proportionnel à sa taille actuelle. En l'absence de facteurs extérieurs, la population de poissons double en dix jours. Cependant, chaque jour, cinq poissons migrent dans la zone, seize sont capturés par les pêcheurs et sept meurent de causes naturelles. Déterminer si la population survivra au fil du temps et, si ce n'est pas le cas, quand elle s'éteindra. La population initiale est de 200 poissons.

Afficher/Masquer la solution

Disons que P(t) est la population de poissons à l'instant t (en jours). Le taux de croissance est proportionnel à la population, ce qui peut être représenté par rP(t), où r est la constante de proportionnalité. Les taux de migration nette et de mortalité contribuent en tant que constantes au taux de variation de la population. L'équation de la variation démographique nette par jour est la suivante :

$$\frac{dP}{dt} = R_{\text{in}} - R_{\text{out}}$$

$$\frac{dP}{dt} = (rP(t) + 5) - (16 + 7)$$

Ainsi, l'équation différentielle avec la condition initiale devient :

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) - 18, \;\; P(0) = 200$$

Avant de résoudre ce PVI, il faut trouver r en utilisant l'information sur le doublement de la population en dix jours sans facteurs externes. Si la population initiale est de 200, alors elle atteindra 400 en deux jours.

$$\frac{dP}{dt} = rP(t), \;\; P(10) = 400$$

La solution générale de cette équation différentielle séparable est

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

En appliquant la condition initiale, on obtient

$$\begin{aligned} P(10) &= 400 \\ 200e^{10r} &= 400 \\ e^{10r} &= 2 \\ r &= \frac{\ln(2)}{10} \end{aligned}$$

Maintenant, revenons à l'équation différentielle originale.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\ln(2)}{10}P - 18, \;\; P(0) = 200$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, que nous écrivons sous forme standard :

$$\frac{dP}{dt} - \frac{\ln(2)}{10}P = -18$$

Le facteur intégrant est

$$u(x) = e^{-\int \frac{\ln(2)}{10}dt} = e^{-\frac{\ln(2)}{10}t}$$

La solution générale est

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{\frac{\ln(2)}{10}t}\left[\int -18e^{-\frac{\ln(2)}{10}t}dt + C\right] \\ P(t) &= e^{\frac{\ln(2)}{10}t}\left[18\left(\frac{10}{\ln(2)}\right)e^{-\frac{\ln(2)}{10}t} + C\right] \\ P(t) &= \frac{180}{\ln(2)} + Ce^{\frac{\ln(2)}{10}t} \end{aligned}$$

En appliquant la condition initiale, on obtient

$$\begin{aligned} P(0) &= 200 \\ \frac{180}{\ln(2)} + Ce^0 &= 200 \\ C &\approx -59.6851 \end{aligned}$$

La solution spécifique est donc

$$P(t) = \frac{180}{\ln(2)} - 59{,}6851e^{\frac{\ln(2)}{10}t}$$

Le terme exponentiel a un exposant positif et croît donc de manière exponentielle. Cependant, comme le coefficient du terme exponentiel est négatif, l'ensemble de la population diminue et finit par disparaître. Pour déterminer quand la population finira par s'éteindre, il faut prendre $P = 0$ et trouver la valeur de t.

$$0 = \frac{180}{\ln(2)} - 59{,}6851e^{\frac{\ln(2)}{10}t}$$
$$t \approx 21{,}2132 \text{ jours}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=150

C. Problèmes de mélanges

Les problèmes de mélanges consistent à combiner des substances ou des quantités et à observer leur interaction dans le temps. Il peut s'agir de polluants dans un lac, de différents produits chimiques dans un réacteur, voire de sucre se dissolvant dans du café. L'élément commun à ces scénarios est le changement de concentration des substances dans un mélange au fil du temps. Les équations différentielles, en particulier celles du premier ordre, permettent de modéliser et de résoudre ces situations dynamiques.

Dans les problèmes de mélanges, $Q(t)$ représente la quantité de substance dissoute dans le fluide, qui évolue avec le temps au débit ($\frac{dQ}{dt}$). Le débit est influencé par les entrées et sorties de la substance.

Pour un problème de mélanges type, on peut avoir un réservoir contenant une certaine quantité de fluide dans lequel une autre substance est mélangée. La concentration de la substance dans le réservoir change au fur et à mesure que l'on ajoute ou que l'on retire de la substance. L'équation différentielle générale du premier ordre pour un tel scénario est similaire à celle que nous avons examinée pour l'évolution démographique d'une région.

$$\frac{dQ}{dt} = R_{\text{entrée}} - R_{\text{sortie}}$$

Ici, $R_{\text{entrée}}$ est le taux auquel la substance entre dans le système et R_{sortie} est le taux auquel la substance quitte le système.

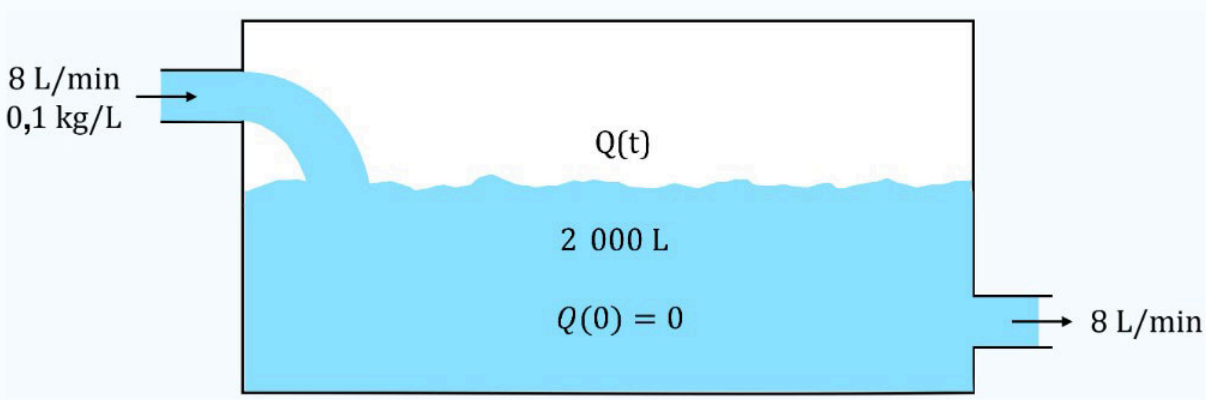
Exemple 2.5.2 : Problème de mélanges avec les mêmes taux d'entrée et de sortie

Prenons une citerne renfermant 2 000 litres d'eau fraîche. En commençant à l'instant $t = 0$, l'eau contenant 0,1 kilogramme de sel par litre est versée dans la citerne au taux de 8 liters/min. Le mélange est maintenu uniforme par agitation et est évacué de la citerne au même rythme qu'il est rempli. **a)** Formule une équation différentielle pour la quantité de sel dans la citerne ($Q(t)$) à n'importe quel instant et résous l'équation pour déterminer $Q(t)$. **b)** Déterminer quand la concentration de sel dans la citerne va atteindre $0{,}04 \text{ kg/L}$.

Afficher/Masquer la solution

Informations données

- Le volume d'eau dans la citerne (V) est constant puisque les entrées et sorties d'eau sont égales : $V = 2\,000\ L$
- Débit d'entrée d'eau $= 8 \text{ L/min}$
- Débit de sortie d'eau $= 8 \text{ L/min}$
- Concentration de sel entrant : $0{,}1 \text{ kg/L}$



a) Notre tâche consiste à déterminer le taux auquel le sel entre dans la citerne ($R_{\text{entrée}}$) et le taux auquel il quitte la citerne. Il ne faut pas oublier que le taux auquel l'eau entre dans la citerne est différent du taux auquel le sel pénètre et quitte la citerne.

$$\frac{dQ}{dt} = R_{\text{entrée}} - R_{\text{sortie}}$$

Le taux auquel le sel entre dans la citerne est le produit de la concentration de sel de l'eau entrante et le débit d'entrée de l'eau :

$$\begin{aligned} R_{\text{entrée}} &= (0{,}1\text{kg/L})(8\text{L/min}) \\ &= 0{,}8 \text{ kg/min} \end{aligned}$$

Le taux auquel le sel quitte la citerne est la concentration de sel dans la citerne (rapport entre le sel dans la citerne et le volume d'eau dans la citerne), multipliée par le débit de sortie de l'eau. À tout moment, la quantité de sel dans la citerne est $Q(t)$.

$$R_{\text{sortie}} = \text{Concentration} \times \text{Débit d'eau sortant}$$

$$\begin{aligned} R_{\text{outflow}} &= \left(\frac{Q(t)}{2\,000} \text{ kg/L}\right) \cdot (8 \text{ L/min}) \\ &= \frac{Q(t)}{250} \end{aligned}$$

Au départ, la citerne ne contient que de l'eau pure non salée, de sorte que $Q(0) = 0$. Ainsi, l'équation différentielle avec une condition initiale devient

$$\frac{dQ}{dt} = R_{\text{entrée}} - R_{\text{sortie}}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.8 - \frac{Q(t)}{250}, \; Q(0) = 0$$

L'équation différentielle est séparable (et linéaire) et peut donc être facilement résolue. La solution du PVI est

$$Q(t) = 200\left(1 - e^{-\frac{t}{250}}\right)$$

Cette équation nous donne le volume de sel dans la citerne $Q(t)$ en kilogrammes à tout instant t après le début du processus.

b) Pour déterminer quand la concentration de sel dans la citerne atteint $0{,}04 \text{ kg/L}$, il faut d'abord trouver une équation pour la concentration en termes de temps. La concentration est le rapport entre la quantité de sel et le volume d'eau. Le volume reste constant à 2 000 litres. Ainsi, la concentration $C(t)$ à l'instant t est la quantité de sel divisée par le volume total V :

$$C(t) = \frac{Q(t)}{V} \text{ kg/L}$$

$$C(t) = \frac{200}{2\,000}\left(1 - e^{-\frac{t}{250}}\right)$$

$$= 0.1\left(1 - e^{-\frac{t}{250}}\right)$$

Maintenant, il faut trouver la valeur de t quand $C(t) = 0{,}04 \text{ kg/L}$.

$$C(t) = 0{,}04$$
$$0.1\left(1 - e^{-\frac{t}{250}}\right) = 0.04$$
$$e^{-\frac{t}{250}} = 1.4$$
$$t = -250\ln(0{,}6)$$
$$\approx 127{,}71 \text{ min}$$

La concentration de sel dans la citerne atteindra 0,04 kg/L environ $t \approx 127{,}71$ minutes après le début du processus.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=150

D. Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton décrit la vitesse à laquelle la température d'un objet change lorsqu'il est exposé à un environnement dont la température est différente et constante. Le principe fondamental est que le taux de variation de température ($\frac{dT}{dt}$) est proportionnel à la différence entre la température de l'objet (T) et la température ambiante (T_s). L'équation différentielle représentant la loi de refroidissement de Newton est donc

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

Dans cette équation, T représente la température de l'objet à n'importe quel instant t, T_s est la température ambiante constante, k est une constante positive dépendante des caractéristiques de l'objet et de son milieu environnant et $\frac{dT}{dt}$ est le taux de variation de la température. Lorsque la température initiale est dénotée par T_0, le problème de valeur initiale est

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s), \quad T(0) = T_0$$

Cette équation différentielle est séparable (et linéaire), et a pour solution

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt} \tag{2.5.1}$$

Le signe négatif de l'exposant indique que la différence de température entre l'objet et son milieu environnant diminue exponentiellement avec le temps. Cette formule est valable même si l'objet est initialement plus chaud ou plus froid que son milieu environnant, décrivant à la fois les processus de refroidissement et de réchauffement selon les hypothèses de la loi.

Exemple 2.5.3 : Loi de refroidissement de Newton

Prenons un microprocesseur fonctionnant dans un environnement dans lequel la température ambiante est constante à 25 $^{\circ}C$. Après une longue période de fonctionnement, la température du microprocesseur est de 75 $^{\circ}C$. Une fois l'appareil éteint, le microprocesseur commence à refroidir jusqu'à atteindre la température ambiante. Supposons que la constante de refroidissement caractéristique k pour ce scénario, qui dépend des propriétés de transfert de chaleur du microprocesseur et de son système de refroidissement, est de 0,07/min. **a)** Trouver l'équation de la température du microprocesseur. **b)** Quelle sera la température du microprocesseur dix minutes après l'arrêt de l'appareil? **c)** Combien de temps faudra-t-il pour que le microprocesseur refroidisse à 35 $^{\circ}C$?

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Température ambiante : $T_s = 25^{\circ}C$
- Température initiale du microprocesseur : $T_0 = 75^{\circ}C$
- Constante de refroidissement t: $k = 0{,}07 \text{ min}^{-1}$

a) En introduisant les valeurs données dans la solution de l'équation de la loi de refroidissement de Newton, l'équation de la section 2.5.1, on obtient la formule pour $T(t)$.

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$$
$$T(t) = 25 + (75 - 25)e^{-0{,}07t}$$

b) Pour trouver la température du microprocesseur dix minutes après l'arrêt de l'appareil, il faut introduire $t = 10$ minutes dans $T(t)$.

$$T(10) = 25 + (75 - 25)e^{-0{,}07(10)}$$
$$\approx 49{,}83^{\circ}C$$

c) Pour trouver quand la température sera de 35 $^{\circ}C$, il faut réarranger la formule quand $T(t) = 35^{\circ}C$.

$$25 + (75 - 25)e^{-0{,}07t} = 35$$
$$e^{-0{,}07t} = \frac{1}{5}$$
$$t = \frac{\ln(5)}{0.07}$$
$$t \approx 23 \text{ minutes}$$

Il faut 23 minutes au microprocesseur pour refroidir à 35 $^{\circ}C$.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=150

E. Dynamique de la chute d'objets

La dynamique de la chute d'objets est un exemple classique de la façon dont les équations différentielles modélisent des situations du monde réel. Ce phénomène est directement lié à la deuxième loi du mouvement de Newton, qui stipule que la force agissant sur un objet est égale à la masse de l'objet multipliée par son accélération.

$$F = ma$$

Dans cette équation, la force peut dépendre du temps (t), du déplacement (y) et de la vitesse (v). Pour ce qui est des équations du premier ordre, nous considérons généralement des problèmes où F ne dépend pas de y, car l'inclusion conduit souvent à des équations d'ordre supérieur. Étant donné que l'accélération de l'objet (a) est $dv\,/\,dt$, l'équation de la deuxième loi du mouvement de Newton devient

$$mv' = F(t, v)\,.$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir v en fonction du temps.

Modèle de base

Le modèle le plus simple de chute d'un objet applique la deuxième loi de Newton en considérant la pesanteur comme la seule force agissant sur l'objet. Ici, la force due à la pesanteur est $F_g = mg$, ce qui donne l'équation différentielle

$$m\frac{dv}{dt} = F_g$$

où g est l'accélération due à la pesanteur, la masse étant supposée constante. Ce modèle part du principe qu'il n'y a pas de résistance de l'air et que le champ gravitationnel est uniforme. La valeur approximative de g est $g = 9{,}8\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ (unité métrique) ou $g = 32\ \text{pied}/\mathrm{s}^2$ (unité britannique). Le signe de F_g change en fonction de la convention de direction que l'on définit pour un problème. Par exemple, si l'on décide que la direction ascendante est positive, puisque la force due à la pesanteur est descendante, l'équation est simplifiée comme suit :

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

Inclusion de la résistance de l'air

En réalité, lorsqu'un objet tombe, il rencontre la résistance de l'air, qui s'oppose au mouvement de l'objet. La force nette exercée sur l'objet devient alors une combinaison de la pesanteur et de la résistance de l'air, ce qui modifie l'équation en

$$mv' = F_g + F_A \tag{2.5.2}$$

où F_A est la force de la résistance de l'air.

La force de la résistance de l'air est souvent proportionnelle à la vitesse de l'objet, de sorte que $F_A = -kv$, où k est une constante de proportionnalité (valeur positive) qui représente le coefficient de la résistance de l'air. Lorsque l'on résout des problèmes impliquant des forces et des mouvements, il est important de veiller à ce que les conventions relatives aux directions positives et négatives soient cohérentes.

Au fur et à mesure que l'objet tombe, la résistance de l'air augmente avec la vitesse jusqu'à ce qu'elle équilibre la force gravitationnelle. À ce point d'équilibre, la force nette est nulle et l'objet n'accélère plus, atteignant une vitesse constante, appelée **vitesse limite de chute**.

Exemple 2.5.4 Chute d'objet avec résistance de l'air

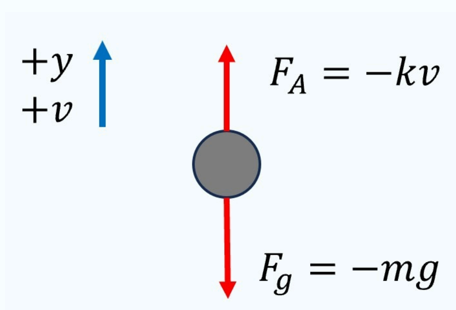
Prenons un objet ayant une masse de 25 kg et se déplaçant initialement vers le bas à une vitesse de -29 m/s. En chutant, l'objet traverse l'atmosphère, qui exerce une force de résistance à son mouvement. La force de résistance est proportionnelle à la vitesse de l'objet. Plus précisément, lorsque la vitesse de l'objet est de 2 m/s, on sait que la force de résistance est de 20 N. **a)** Écris l'équation différentielle décrivant le mouvement de l'objet en termes de vitesse et de temps. **b)** Résous l'équation différentielle pour trouver la vitesse de l'objet en fonction du temps, $v(t)$. **c)** Détermine la vitesse limite de chute de l'objet.

Afficher/Masquer la solution

Informations données

- Masse de l'objet : $m = 25 \text{ kg}$
- Vitesse initiale : $v_0 = -29 \text{ m/s}$
- Accélération due à la pesanteur : $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

a) La vitesse descendante est exprimée par une valeur négative. Par conséquent, la direction ascendante est positive et la direction descendante est négative.



Les deux principales forces agissant sur l'objet sont la pesanteur et la résistance de l'air. La force de pesanteur agit toujours vers le bas, que nous considérons comme une valeur négative dans notre système de coordonnées, et est donnée par $-mg$.

D'autre part, la résistance de l'air agit dans la direction opposée au mouvement de l'objet, en produisant une force ascendante lorsque l'objet chute. Cette force est représentée par $-kv$. Le signe négatif dans $-kv$ garantit que la force de la résistance de l'air est toujours opposée au mouvement : elle est positive (ascendante) lorsque l'objet chute ($v$est négatif) et négative (descendante) lorsque l'objet se déplace vers le haut (v est positif).

En combinant ces forces, l'équation du mouvement est

$$mv' = -F_g + F_A$$
$$mv' = -mg - kv$$

Nous pouvons utiliser l'information selon laquelle l'ampleur de la résistance de l'air est de $20\ \mathrm{N}$ lorsque la vitesse est $2\ \mathrm{m/s}$ pour trouver k:

$$F_A = k|v|$$
$$k = \frac{F_A}{|v|}$$

Formula does not parse

En introduisant les valeurs avec la condition initiale $v(0) = -29\ \mathrm{m/s}$, on obtient le PVI

$$25v' = -245 - 10v, v(0) = -29$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle séparable (et linéaire). La solution générale de l'équation est

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(Ce^{-\frac{2}{5}t} - 49\right)$$

En appliquant la condition initiale, on obtient

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(-9e^{-\frac{2}{5}t} - 49\right)$$

c) La vitesse limite de chute est

$$\lim_{x\to\infty} v(t) = -\frac{49}{2}\ \mathrm{m/s}$$ oo)v(t)=-49/2 \ « m/s » » title= »lim_(x->oo)v(t)=-49/2 \ « m/s » » class= »asciimath mathjax »>

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=150

F. Circuits électriques : RL et RC

Les circuits électriques font partie intégrante des avancées technologiques et fonctionnent grâce à l'interaction de composants tels que des résistances, des inducteurs et des condensateurs. Dans cette section, nous abordons spécifiquement l'application des équations différentielles du premier ordre pour analyser les circuits électriques composés d'une source de tension avec soit une résistance et un inducteur (RL), soit une résistance et un condensateur (RC), comme illustré à la figure 2.5.1 Les circuits contenant à la fois un inducteur et un condensateur, connus sous le nom de circuits RLC, sont régis par des équations différentielles du second ordre, un sujet sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant.

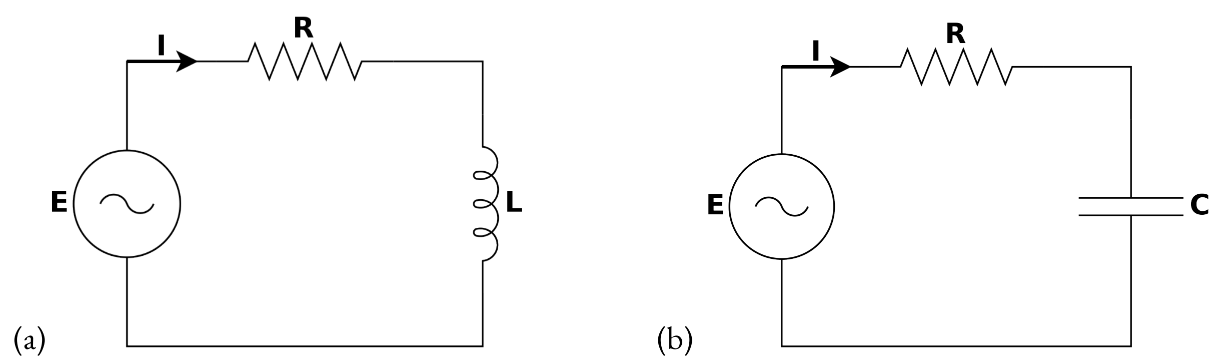


Figure 2.5.1 (a) Circuit série RL et (b) Circuit série RC

Les lois de Kirchhoff – lois des nœuds et loi des mailles – constituent les principes fondamentaux régissant les circuits électriques. La loi des nœuds de Kirchhoff stipule que le courant total entrant en un point (nœud) doit être égal au courant total sortant, ce qui implique que la somme algébrique des courants dans un nœud est nulle. La loi des mailles Kirchhoff stipule que la somme algébrique de toutes les tensions autour d'une boucle fermée d'un circuit (maille) doit être égale à zéro.

La loi des nœuds de Kirchhoff implique que le même courant passe à travers tous les éléments des circuits de la figure 2.5.1. Pour appliquer la loi des mailles de Kirchhoff, il est essentiel de comprendre la baisse de tension à travers chaque composant :

a) Selon la loi d'Ohm, la baisse de tension E_R aux bornes d'une résistance est proportionnelle au courant I circulant entre ces bornes, ce qui s'exprime par $E_R = RI$, où R est la résistance.

b) Selon la loi de Faraday, complétée par la loi de Lenz, la baisse de tension E_L aux bornes d'un inducteur est proportionnelle au taux de variation du courant, ce qui s'exprime par $E_L = L\frac{dI}{dt}$, où L est l'inductance.

c) La baisse de tension E_C aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la charge électrique q qui y est stockée, ce qui est représenté par $E_C = \frac{1}{C}q$, C étant la capacité.

Modèle de circuit RL

Dans cette section, nous dérivons le modèle mathématique d'un circuit RL tel qu'illustré à la figure 2.5.1, la dérivation du modèle pour un circuit RC étant réservée aux exercices. Considérons que $E(t)$ est la source de tension du circuit RL. En appliquant la loi des mailles de Kirchhoff, nous avons

$$V_L + V_R = E(t)$$
$$E_L + E_R = E(t)$$

où $E_L = L\frac{dI}{dt}$ est la tension aux bornes de l'inducteur et $E_R = RI$ est la tension aux bornes de la résistance. En substituant ces éléments dans l'équation, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

ou, dans la forme standard

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}$$

Pour résoudre cette équation différentielle linéaire, il faut utiliser un facteur intégrant

$$u(x) = e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{Rt/L}$$

la solution générale pour le courant $I(t)$ est donc :

$$I(t) = e^{-Rt/L}\left[\int e^{Rt/L}\,\frac{E(t)}{L}dt + C\right] \quad \textbf{(2.5.3)}$$

Avec un $E(t)$ spécifique et une condition initiale, telle que $I(0)$, on peut déterminer le courant I(t) avec l'équation ci-dessus. Une fois que $I(t)$ est connu, la tension aux bornes de la résistance et de l'inducteur peut être déterminée.

Exemple 2.5.5 : Circuit série RL

Prenons un circuit série RL avec une résistance de $3\ \Omega$ et un inducteur de $0{,}01\ H$, alimenté par une source de tension de $E(t) = \sin(10t)\ V$. Au départ, le courant aux bornes de la résistance, $I(0)$, est de 0 A. Calcule ce qui suit : **a)** le courant $I(t)$ dans le circuit en fonction du temps, **b)** la tension aux bornes de l'inducteur en fonction du temps et **c)** la tension aux bornes de la résistance en fonction du temps.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Résistance : $R = 3\ \Omega$
- Inducteur : $L = 0{,}01\ H$
- Source de tension : $E(t) = \sin(10t)\ V$
- Condition initiale : $I(0) = 0\ A$

a) Trouver le courant $I(t)$

L'équation différentielle pour un circuit série RL selon la loi des mailles de Kirchhoff est

$$V_L + V_R = E(t)$$
$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

En introduisant les valeurs données, on obtient

$$0{,}01\frac{dI}{dt} + 3I = \sin(10t)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre.

$$u(t) = e^{\int \frac{3}{0{,}01}dt} = e^{300}t$$

L'équation de la section 2.5.3 donne la solution de cette équation différentielle.

$$I(t) = e^{-300t}\left[100\int e^{300t}\sin(10t)dt + C\right]$$

Le côté droit implique une intégrale avec des termes exponentiels et sinusoïdaux qui est généralement résolue en utilisant l'intégration par parties. Nous ne fournissons que la solution finale de l'intégrale, les étapes détaillées de l'intégration faisant l'objet d'un autre un exercice à explorer plus avant.

$$I(t) = e^{-300t}\left[-\frac{10}{901}e^{300t}\cos(10t) + \frac{300}{901}e^{300t}\sin(10t) + C\right]$$

Ce qui peut être simplifié en

$$I(t) = -\frac{10}{901}\cos(10t) + \frac{300}{901}\sin(10t) + Ce^{-300t}$$

En appliquant la condition initiale, on obtient

$$I(0) = 0$$
$$-\frac{10}{901}\cos(0) + \frac{300}{901}\sin(0) + Ce^{0} = 0$$
$$-\frac{10}{901} + C = 0$$
$$C = \frac{10}{901}$$

Le courant est donc

$$I(t) = -\frac{10}{901}\cos(10t) + \frac{300}{901}\sin(10t) + \frac{10}{901}e^{-300t}$$

b) Trouver la tension aux bornes de l'inducteur $V_L(t)$

Pour trouver la tension aux bornes de l'inducteur, il faut d'abord différencier $I(t)$.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{100}{901}\sin(10t) + \frac{3\ 000}{901}\cos(10t) - \frac{3\ 000}{901}e^{-300t}$$

La tension aux bornes de l'inducteur est donc

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$
$$V_L(t) = 0{,}01\left[\frac{100}{901}\sin(10t) + \frac{3\ 000}{901}\cos(10t) - \frac{3\ 000}{901}e^{-300t}\right]$$
$$V_L(t) = \frac{1}{901}\sin(10t) + \frac{30}{901}\cos(10t) - \frac{30}{901}e^{-300t}$$

c) Trouver la tension aux bornes de la résistance $V_R(t)$

De façon similaire, la tension aux bornes de la résistance est obtenue par

$$V_R = RI$$
$$V_R(t) = 3\left[-\frac{10}{901}\cos(10t) + \frac{300}{901}\sin(10t) + \frac{10}{901}e^{-300t}\right]$$
$$V_R(t) = -\frac{30}{901}\cos(10t) + \frac{900}{901}\sin(10t) + \frac{30}{901}e^{-300t}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=150

Section 2.5 Exercices

1. Une cuve contient initialement une solution de 11 kg de sel dans 2 400 litres d'eau. De l'eau contenant 0,2 kg de sel par litre est ajoutée à la cuve à un débit de 11 L/min, et la solution résultante est évacuée à la même vitesse. Disons que $Q(t)$ indique la quantité (kg) de sel à l'instant t (min). **a)** Rédige une équation différentielle pour $Q(t)$. **b)** Trouve la quantité $Q(t)$ de sel dans la cuve à l'instant t. **c)** Détermine quand la concentration de sel dans la cuve atteindra 0,1 kg/L. *Arrondis le résultat à la minute la plus proche.*

   Afficher/Masquer la réponse

   a) $Q'(t) = 2{,}2 - \frac{11}{2\,400}Q(t)$
   b) $Q(t) = 480 - 469e^{-\frac{11}{2\,400}t}$
   c) 146 min

2. Un fluide initialement à 135 $^\circ C$ est placé dehors, un jour où la température est de -30 $^\circ C$, et la température du fluide chute de 30 $^\circ C$ en une minute. Disons que $T(t)$ est la température, en degrés Celsius, à l'instant t, en minutes. **(a)** Trouve la température $T(t)$ du fluide pour $t > 0$ 0″ title= »t > 0″ class= »asciimath mathjax »>. **(b)** Trouve la température du fluide quinze minutes après qu'il a été placé dehors. *Arrondis votre résultat à deux décimales.*

   Afficher/Masquer la réponse

   a) $T(t) = -30 + 165\left(\frac{9}{11}\right)^t$
   b) $T(15) = -21{,}87^\circ C$

3. Un objet d'une masse de $32\ \mathrm{kg}$ a une vitesse descendante initiale de $-69\ \mathrm{m/s}$. Supposons que

l'atmosphère exerce une force de résistance proportionnelle à la vitesse. La résistance est de $20\ \mathrm{N}$ lorsque que la vitesse est de $4\ \mathrm{m/s}$. Utilise $g = 10\ \mathrm{m}/s^2$. a) Rédige une équation différentielle en termes de vitesse v et d'accélération v'. **b)** Trouve la vitesse$v(t)$ de l'objet.

Afficher/Masquer la réponse

a) $32v' = -320 - 5v$
b) $v(t) = -64 - 5e^{-\frac{5}{32}\cdot t}$

4. Supposons qu'un circuit RL avec une résistance de 3Ω et un inducteur de $1H$ est alimenté par une tension de $E(t) = e^{4t}\ V$. Si la résistance initiale est $I(0) = 0A$, trouve le courant I et la tension aux bornes de l'inducteur E_L et de la résistance E_R en termes de temps t. Trouve le courant $I(t)$.

Afficher/Masquer la réponse

$$I(t) = \frac{1}{7}\left(e^{4t} - e^{-3t}\right)$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

Description du chapitre

Ce chapitre traite des équations différentielles linéaires du second ordre, une catégorie d'équations fondamentale dans l'étude des mathématiques, de la physique et de l'ingénierie. Il explore leur structure et les techniques pour les résoudre et examine la façon dont elles modélisent des systèmes du monde réel, tels que des systèmes mécaniques vibratoires et des circuits électriques.

3.1. Équations homogènes : cette section étudie les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre, pour lesquelles il n'y a pas de fonction de forçage externe. La solution générale consiste à trouver deux solutions linéairement indépendantes, qui constituent la base de toutes les solutions possibles.

3.2 Équations à coefficients constants : cette section s'intéresse aux équations homogènes à coefficients constants.

3.3. Équations non homogènes : cette section explore les équations non homogènes, qui modélisent des systèmes influencés par des forces ou intrants externes.

Le chapitre présente ensuite diverses méthodes de résolution d'équations à coefficients variables et de structures non homogènes.

3.4 Méthode des coefficients indéterminés : cette méthode est efficace pour les équations non homogènes à coefficients constants.

3.5 Méthode de variation des paramètres : technique polyvalente pour des cas plus généraux.

3.6 Méthode de réduction d'ordre : utile pour trouver une seconde solution lorsqu'une solution est déjà connue.

3.7 Équation de Cauchy-Euler : réservée aux équations à coefficients variables sous une forme particulière.

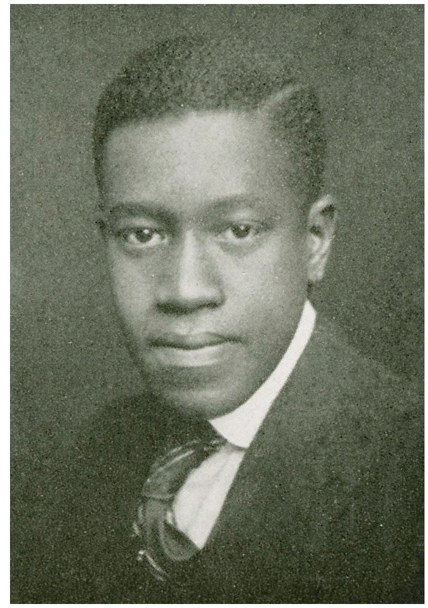
Le chapitre se conclut avec l'application de ces concepts à des scénarios physiques et techniques.

3.8 Systèmes mécaniques : cette section examine le comportement de systèmes masse-ressort, notamment les vibrations libres, forcées, amorties et non amorties.

3.9 Circuits électriques : cette section aborde l'analyse de circuits RLC, comportant une résistance, un inducteur et un condensateur.

Pionniers du progrès

Elbert Frank Cox, né en 1895 à Evansville, dans l'Indiana, aux États-Unis, occupe une place monumentale dans l'histoire puisqu'il a été le premier Afro-Américain à obtenir un doctorat en mathématiques. Surmontant les barrières raciales omniprésentes à son époque, Cox a pu obtenir un doctorat à l'université de Cornell en 1925 grâce à son inébranlable détermination. Sa thèse révolutionnaire, « The Polynomial Solutions of the Difference Equation » (Les Solutions polynomiales de l'équation différentielle), a jeté les bases d'avancées significatives dans le domaine des équations différentielles. Le parcours académique de Cox est non seulement une réussite personnelle, mais également une source d'inspiration, symbolisant un potentiel extraordinaire d'accomplissement en dépit d'obstacles systémiques. Après avoir obtenu son doctorat, il a consacré sa vie à l'éducation, enseignant dans des établissements supérieurs et universités historiquement noirs et façonnant la prochaine génération de mathématiciens. L'héritage d'Elbert Frank Cox va au-delà de ses contributions mathématiques : il témoigne de la résilience et du brio intellectuel face aux défis de la société, ouvrant la voie aux futurs chercheurs et chercheuses d'horizons divers.



Elbert Frank Cox (1895-1969). Source : auteur inconnu, domaine public, via Wikimedia Commons.

3.1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE

Les équations différentielles linéaires du second ordre présentent cette forme :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.1.1}$$

Ici, y est la fonction que nous recherchons et $p(x)$, $q(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues. Dans le cas d'équations non homogènes, $f(x)$ est ce que l'on appelle la fonction de forçage, représentant des forces ou influences externes. Commençons par le cas homogène, où $f(x) = 0$, nous explorerons le cas non homogène plus tard.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.1.2}$$

Théorème d'unicité des solutions. Si $p(x)$ et $q(x)$ sont continus sur un intervalle ouvert (a, b), alors le problème de valeur initiale a une solution unique dans cet intervalle.

Théorème de combinaison linéaire. Supposons que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions de l'équation homogène 3.1.2 sur un intervalle ouvert (a, b). En ce cas, n'importe quelle combinaison linéaire $y = c_1y_1 + c_2y_2$ constitue également une solution sur le même intervalle.

Toutes ces solutions, y_1 et y_2, forment un ensemble fondamental ou une base pour l'espace des solutions si elles sont linéairement indépendantes. Partant, n'importe quelle solution à l'équation 3.1.2 peut être exprimée comme une combinaison linéaire de y_1 et y_2. Le wronskien, W, est crucial pour déterminer l'indépendance linéaire. Pour y_1 et y_2, le wronskien en tout x_0 dans (a, b) doit être non nul pour confirmer l'indépendance :

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y'_2(x_0) - y'_1(x_0)y_2(x_0) \tag{3.1.3}$$

Théorème d'indépendance linéaire. Si $p(x)$ et $q(x)$ sont continus sur (a, b) et si y_1 et y_2 sont des solutions, alors elles sont linéairement indépendantes sur (a, b) si et uniquement si le wronskien W n'est nulle part égal à zéro sur (a, b).

Théorème d'Abel. Si $p(x)$ et $q(x)$ sont continus sur (a, b) et si x_0 est n'importe quel point dans (a, b), alors le wronskien $W(x)$ est donné par :

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

Le théorème d'Abel constitue un outil puissant pour analyser le comportement de solutions sur un intervalle, stipulant que si le wronskien n'est pas nul en un point et si $p(x)$ est continu, alors le wronskien reste non nul dans tout l'intervalle.

Théorème d'équivalence : Lorsque $p(x)$ et $q(x)$ sont continus sur (a, b), et compte tenu de deux solutions y_1 et y_2 à l'équation 3.1.2, les solutions suivantes sont équivalentes :

- la solution générale de l'équation sur (a, b) est $y = c_1y_1 + c_2y_2$
- $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation sur (a, b)
- $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendant sur (a, b)
- Le wronskien de $\{y_1, y_2\}$ n'est pas nul en un point dans (a, b)
- Le wronskien de $\{y_1, y_2\}$ n'est pas nul à tous les points dans (a, b)

Grâce à ces théorèmes fondamentaux, nous disposons des outils nécessaires pour commencer à résoudre des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre et nous préparer aux complexités des cas non homogènes.

Exemple 3.1.1 : Calculer le wronskien et trouver une solution générale à partir de deux solutions données

Les deux solutions de l'équation différentielle $y'' - 11y' + 30y = 0$ sont $y_1 = e^{6t}$ et $y_2 = e^{5t}$.

a) Trouver le wronskien des solutions et déterminer si elles sont linéairement indépendantes.

b) Trouver la solution générale de l'équation différentielle.

c) Trouver la solution satisfaisant les conditions initiales $y(0) = -5,\ y'(0) = -32.$

Afficher/Masquer la solution

a) Pour trouver le wronskien, il faut utiliser l'équation 3.1.3. Il faut d'abord trouver les dérivées premières des solutions y_1 et y_2.

$y_1 = e^{6t} \rightarrow$ » title= »y_1=e^(6t) -> » class= »asciimath mathjax »> $y_1' = 6e^{6t}$

$y_2 = e^{5t} \rightarrow$ » title= »y_2 = e^(5t)-> » class= »asciimath mathjax »> $y'_2 = 5e^{5t}$

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{6t} & e^{5t} \\ 6e^{6t} & 5e^{5t} \end{vmatrix}$$

$= -e^{11t} \neq 0$ pour tout instant t

Le wronskien $W(t) = -e^{11t}$ n'est jamais égal à zéro quelle que soit la valeur de t, ce qui signifie que les solutions sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

b) Comme les solutions sont linéairement indépendantes, on peut exprimer la solution générale de l'équation différentielle comme une combinaison de ces solutions.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1 e^{6t} + c_2 e^{5t}$$

Ici, c_1 et c_2 sont des constantes qui seront déterminées en fonction des conditions initiales ou des exigences spécifiques du problème.

c) Il faut appliquer les conditions initiales pour trouver les constantes c_1 et c_2.

En appliquant la condition initiale à y :

$$y(0) = -5$$
$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = -5$$
$$c_1 + c_2 = -5$$

En appliquant la condition initiale à y' :

$$y' = 6c_1 e^{6t} + 5c_2 e^{5t}$$
$$y'(0) = -32$$
$$6c_1 e^0 + 5c_2 e^0 = -32$$
$$6c_1 + 5c_2 = -32$$

Pour déterminer c_1 et c_2, il faut résoudre le système suivant de deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -5 \\ 6c_1 + 5c_2 = -32 \end{cases}$$

La résolution du système donne

$$c_1 = -7, \quad c_2 = 2$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$y = -7e^{6t} + 2e^{5t}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=167

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=167

Section 3.1 Exercices

1. Calcule le wronskien des fonctions $y_1 = 2e^{\frac{x}{6}}$ et $y_2 = xe^{\frac{x}{6}}$. Détermine si les fonctions sont linéairement indépendantes pour tous les nombres réels.

   Afficher/Masquer la réponse

   $W(x) = 2e^{\frac{1}{3}x}$; les fonctions sont linéairement indépendantes parce que $W(x) \neq 0$ pour tous les nombres réels.

2. Deux solutions à l'équation $y'' - y' - 2y = 0$ sont $y_1 = e^{-t}, y_2 = e^{2t}$.
   a) Trouve le wronskien.
   b) Trouve la solution satisfaisant les conditions initiales $y(0) = 2,\ y'(0) = -11$.

   Afficher/Masquer la réponse

   a) $W(t) = 3e^{t}$
   b) $y(t) = 5e^{-t} - 3e^{2t}$

3. Deux solutions à l'équation $y'' + 10y' + 41y = 0$ sont $y_1 = e^{-5t}\sin(4t)$, $y_2 = e^{-5t}\cos(4t)$.
   a) Trouve le wronskien.
   b) Trouve la solution satisfaisant les conditions initiales $y(0) = -5,\ y'(0) = 9$.

   Afficher/Masquer la réponse

a) $W(t) = -4e^{-10t}$

b) $y(t) = -4e^{-5t}\sin(4t) - 5e^{-5t}\cos(4t)$

3.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Considérons en premier lieu l'équation homogène à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.2.1}$$

Pour résoudre cette équation, il; faut admettre que la solution doit avoir pour propriété que sa dérivée seconde peut être exprimée comme une combinaison linéaire de la dérivée première et de la fonction elle-même, ce qui suggère que la forme de la solution est $y = e^{rx}$. En remplaçant $y = e^{rx}$ et ses dérivées dans l'équation 3.2.1, on obtient

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0$$

Comme e^{rx} n'est jamais nul pour n'importe quel nombre réel x, on peut conclure que

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{3.2.2}$$

L'équation 3.2.2 est appelée l'**équation auxiliaire** ou l'**équation caractéristique** (polynôme caractéristique) de l'équation homogène 3.2.1. Pour déterminer la solution générale de l'équation 3.2.1, il faut trouver la valeur de r dans l'équation caractéristique.

Les racines de l'équation caractéristique déterminent la nature de la solution, ce qui conduit à trois cas possibles selon que les racines sont réelles et distinctes, réelles et répétées ou complexes conjuguées.

Solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Cas n° 1 : deux racines réelles distinctes

Si l'équation caractéristique (équation 3.2.2) a deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions sont $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$. La solution générale est la combinaison linéaire de ces deux solutions :

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Cas n° 2 : racine répétée

Si l'équation caractéristique a une racine répétée r, alors les solutions sont $y_1 = e^{rx}$ et $y_2 = xe^{rx}$. La solution générale est la combinaison linéaire de ces deux solutions :

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

Cas n° 3 : racines complexes conjuguées

Si l'équation caractéristique a des racines complexes conjuguées sous la forme $r = \alpha \pm i\beta$, alors les solutions peuvent être représentées par la formule d'Euler sous la forme $y_1, y_2 = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x)\right)$. La solution générale à valeur réelle dérivée de ces solutions complexes est

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$$

Sous cette forme, $e^{\alpha x}$ représente la croissance ou la décroissance exponentielle, tandis que la combinaison de cosinus et de sinus représente le comportement oscillatoire dû à la partie complexe des racines.

Exemple 3.2.1 : Trouver la solution générale – Cas n° 1 (deux racines réelles)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Afficher/Masquer la solution

L'équation auxiliaire est

$$r^2 + r - 6 = 0$$

L'équation peut être factorisée en

$$(r+3)(r-2) = 0$$

Les racines sont $r_1 = -3$ et $r_2 = 2$. C'est le cas n° 1 car les racines sont réelles et distinctes. Partant, la solution générale est la combinaison linéaire de $y_1 = e^{-3x}$ et $y_2 = e^{2x}$:

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

Exemple 3.2.2 : Trouver la solution du PVI – Cas n° 1 (deux racines réelles)

Résoudre le problème de valeur initiale (PVI) suivant.

$$y'' - 8y' + 15y = 0, \;\; y(0) = 9, \;\; y'(0) = 35$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution générale :

L'équation auxiliaire est

$$r^2 - 8r + 15 = 0$$

L'équation peut être factorisée en

$$(r-5)(r-3) = 0$$

Les racines sont $r_1 = 5$ et $r_2 = 3$. C'est le cas n° 1 car les racines sont réelles et distinctes. Partant, la solution générale est la combinaison linéaire de $y_1 = e^{5x}$ et $y_2 = e^{3x}$:

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{3x}$$

Appliquer les conditions initiales :

Appliquer la condition initiale à y :

$$y(0) = 9$$
$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = 9$$
$$c_1 + c_2 = 9$$

Appliquer la condition initiale à y' :

$$y' = 5c_1 e^{5x} + 3c_2 e^{3x}$$
$$y'(0) = 35$$
$$5c_1 e^0 + 3c_2 e^0 = 35$$
$$5c_1 + 3c_2 = 35$$

Pour déterminer c_1 et c_2, il faut résoudre le système suivant de deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 9 \\ 5c_1 + 3c_2 = 35 \end{cases}$$

La résolution du système donne

$$c_1 = 4, \quad c_2 = 5$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$y(x) = 4e^{5x} + 5e^{3x}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=169

Exemple 3.2.3 : Trouver la solution générale – Cas n° 2 (racines répétées)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

Afficher/Masquer la solution

L'équation auxiliaire est

$$r^2 - 8r + 16 = 0$$

L'équation peut être factorisée en

$$(r-4)^2 = 0$$

L'équation a une racine répétée $r = 4$. Il s'agit du cas n° 2, la racine répétée. Partant, la solution générale est la combinaison linéaire de e^{4x} et xe^{4x} :

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

Exemple 3.2.4 : Trouver la solution du PVI – Cas n° 2 (racines répétées)

Résoudre le problème de valeur initiale (PVI) suivant.

$$y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 4, \;\; y'(0) = -25$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution générale :

L'équation auxiliaire est

$$r^2 + 10r + 25 = 0$$

L'équation peut être factorisée en

$$(r+5)^2 = 0$$

L'équation a une racine répétée $r = -5$. Il s'agit du cas n° 2, la racine répétée. Partant, la solution générale est la combinaison linéaire de e^{-5x} et xe^{-5x} :

$$y(x) = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$$

Appliquer les conditions initiales :

Appliquer la condition initiale à y :

$$y(0) = 4$$
$$c_1e^0 + c_2(0)e^0 = 4$$
$$c_1 = 4$$

Appliquer la condition initiale à y' :

$$y' = -5c_1e^{-5x} + c_2\left(e^{-5x} - 5xe^{-5x}\right)$$
$$y'(0) = -25$$
$$-5c_1e^0 + c_2\left(e^0 - 0\right) = -25$$
$$-5c_1 + c_2 = -25$$

En introduisant cela dans $c_1 = 4$, on obtient $c_2 = -5$.

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$y(x) = 4e^{-5x} - 5xe^{-5x}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=169

Exemple 3.2.5 : Trouver la solution générale – Cas n° 3 (racines complexes)

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Afficher/Masquer la solution

L'équation auxiliaire est

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

Avec la formule quadratique, on obtient

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

L'équation a des racines complexes conjuguées avec une partie réelle $\alpha = 2$ et une partie imaginaire $\beta = 3$. Il s'agit du cas n° 3, la solution générale est donc

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))$$

Exemple 3.2.6 : Trouver la solution du PVI – Cas n° 3 (racines complexes)

Résoudre le problème de valeur initiale (PVI) suivant.

$$y'' + 2y' + 26y = 0, \qquad y(0) = -3, \quad y'(0) = -7$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution générale :

L'équation auxiliaire est

$$r^2 + 2r + 26 = 0$$

Il est possible de trouver les racines sans faire usage de la formule quadratique vue dans l'exemple précédent, mais par la complétion du carré. Pour varier les plaisirs, nous allons cette fois utiliser la complétion du carré.

$$r^2 + 2r + 1 + 25 = 0$$
$$r^2 + 2r + 1 = -25$$

$$(r+1)^2 = -25$$
$$r+1 = \pm 5i$$
$$r = -1 \pm 5i$$

L'équation a des racines complexes conjuguées avec une partie réelle $\alpha = -1$ et une partie imaginaire $\beta = 5$. Il s'agit du cas n° 3, la solution générale est donc

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x))$$

Appliquer les conditions initiales :

Appliquer la condition initiale à y :

$$y(0) = -3$$
$$e^0(c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)) = -3$$
$$c_1 = -3$$

Appliquer la condition initiale à y' :

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x)) +$$
$$e^{-x}(-5c_1 \sin(5x) + 5c_2 \cos(5x))$$
$$y'(0) = -7$$
$$-c_1 + 5c_2 = -7$$

En introduisant cela dans $c_1 = -3$, on obtient $c_2 = -2$.

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$y(x) = e^{-x}(-3\cos(5x) - 2\sin(5x))$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=169

Section 3.2 Exercices

1. Résous le problème de valeur initiale donné.

$$2y'' + 11y' + 12y = 0, \quad y(0) = 4, \;\; y'(0) = -8{,}5$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(x) = e^{-4x} + 3e^{-1.5x}$$

2. Résous le problème de valeur initiale donné.

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \;\; y'(0) = 8$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(x) = -e^{-2x} + 6xe^{-2x}$$

3. Résous le problème de valeur initiale donné.

$$y'' + 10y' + 26y = 0, \quad y(0) = 4, \;\; y'(0) = -18$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(x) = e^{-5x}(4\cos(x) + 2\sin(x))$$

3.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE

A. Solution générale d'équations non homogènes

Dans cette section, nous explorons les équations différentielles linéaires non homogènes du second ordre de la forme :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.3.1}$$

Théorème d'unicité des solutions. Si $p(x)$ et $q(x)$ sont continus sur un intervalle ouvert (a, b) et si x_0 est dans l'intervalle, alors le problème de valeur initiale a une solution unique dans (a, b).

Pour résoudre l'équation 3.3.1, il faut d'abord trouver les solutions de l'équation homogène associée

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.3.2}$$

L'équation 3.3.2 est l'**équation complémentaire** à l'équation 3.3.1.

Théorème des solutions générales. y_p est une solution particulière de l'équation non homogène 3.3.1 et $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions à l'équation complémentaire 3.3.2. La solution générale de l'équation non homogène est donc

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2. \tag{3.3.3}$$

Ici, $c_1 y_1 + c_2 y_2$ représente la solution de l'équation complémentaire associée, communément exprimée y_c. L'équation 3.3.3 est donc souvent exprimée comme suit :

$$y = y_p + y_c$$

B. Principe de superposition

Le principe de superposition est un outil puissant qui permet de simplifier la résolution d'équations non homogènes. Il consiste à diviser la fonction de forçage en composantes plus simples, à trouver une solution particulière pour chaque composante, puis à additionner ces solutions pour obtenir une solution complète à l'équation d'origine.

Théorème. Si y_{p1} est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

et si y_{p2} est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

alors, pour n'importe quelle constante k_1 et k_2, $y_p = k_1 y_{p1} + k_2 y_{p2}$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$$

Exemple 3.3.1 : Principe de superposition

Étant donné que $y_{p1} = 3\frac{x}{2} - \frac{9}{4}$ est une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = 3x$ (i) et $y_{p2} = \frac{e^{3x}}{2}$ est une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = 10e^{3x}$ (ii), trouver une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = 12x - 20e^{3x}$ (iii).

Afficher/Masquer la solution

- Fonction de forçage de l'équation (i) : $f_1(x) = 3x$
- Fonction de forçage de l'équation (ii) : $f_2(x) = 10e^{3x}$
- Fonction de forçage de l'équation (iii) : $f_3(x) = 12x - 20e^{3x}$

Si l'on regarde le côté droit des équations, on remarque que $f_3(x) = 4f_1(x) - 2f_2(x)$. Par conséquent, la même combinaison linéaire de y_{p1} et y_{p2} donne une solution particulière pour l'équation (iii) :

$$\begin{aligned} y_{p3} &= 4y_{p1} - 2y_{p2} \\ &= 4\left(\frac{3x}{2} - \frac{9}{4}\right) - 2\left(\frac{e^{3x}}{2}\right) \\ &= 6x - 9 - e^{3x} \end{aligned}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=172

Section 3.3 Exercices

1. Étant donné que $y_{p1} = \frac{1}{3}e^{-5x}$ est une solution particulière de $y'' + 6y' + 8y = e^{-5x}$ et que $y_{p2} = -\frac{5}{8}x + \frac{15}{32}$ est une solution particulière de $y'' + 6y' + 8y = -5x$, utilise la méthode de la superposition pour trouver une solution particulière à

$$y'' + 6y' + 8y = -3e^{-5x} + 10x$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_p = -e^{-5x} + \frac{5}{4}x - \frac{15}{16}$$

2. Étant donné que $y_{p1} = -\frac{2}{15}e^{3x}$ est une solution particulière de $y'' - 4y' - 12y = 2e^{3x}$ et que $y_{p2} = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{1}{40}\cos(2x)$ est une solution particulière de $y'' - 4y' - 12y = -\sin(2x)$, utilise la méthode de la superposition pour trouver une solution particulière à

$$y'' - 4y' - 12y = -5e^{3x} + 4\sin(2x)$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_p = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{1}{10}\cos(2x)$$

3.4 MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

La méthode des coefficients indéterminés est une technique permettant de trouver des solutions particulières, y_p à des équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Pour appliquer cette méthode, il faut d'abord identifier la forme de la fonction de forçage $f(x)$, puis faire une supposition raisonnée de y_p avec des coefficients indéterminés. Cette supposition est ensuite remplacée dans l'équation pour trouver la valeur de ces coefficients. Cette méthode est utile lorsque la fonction de forçage, $f(x)$, est une fonction relativement simple, comme un polynôme, une exponentielle, un sinus ou un cosinus, ou une combinaison de ces fonctions.

Exemple 3.4.1 : Forme de la supposition d'une solution particulière

Fonctions de forçage polynomiales : Pour $y'' + y' - 3y = 9x^2 + 7x + 5$, nous ne connaissons pas de solution particulière. Mais, en regardant $f(x)$, on se demande quel type de fonction laisserait un polynôme. Supposons $Y_p = AX^2 + Bx + C$ et trouvons la valeur de A, B, C.

Fonctions de forçage exponentielles : Pour $y'' - 3y' + 2y = 5e^{4x}$, nous supposons $Y_p = Ae^{4x}$. Si $f(x)$ était $5e^{2x}$, il faudrait multiplier notre supposition par x: $Y_p = Axe^{2x}$.

Ajuster la supposition en fonction des solutions d'équations complémentaires : Si l'équation complémentaire a une solution correspondant partiellement à $f(x)$, il faut ajuster la supposition en conséquence. Par exemple, si $f(x) = (3x - 2)e^{4x}$, il faut commencer par $Y_p = (Ax + B)e^{4x}$. Si e^{4x} est une solution à l'équation non homogène, il faut utiliser $Y_p = (Ax + B)xe^{4x}$. Pour une racine répétée, utiliser $Y_p = (Ax + B)x^2e^{4x}$.

Remarque : nous transcrivons Y_p avec un « Y » majuscule pour indiquer qu'il s'agit de notre supposition initiale pour la solution particulière. En revanche, y_p avec un « y » minuscule indique la solution particulière après détermination des coefficients.

Exemple 3.4.2 : Résoudre une équation avec une fonction de forçage exponentielle

Trouver la solution générale de l'équation suivante.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10\frac{dy}{dx} + 25y = 3e^{-2x}$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution complémentaire :

Bien qu'il ne soit pas nécessaire de connaître la solution complémentaire pour trouver la solution particulière, il est utile de la connaître. Comprendre la solution complémentaire permet de faire de meilleures suppositions initiales pour la solution particulière et de les ajuster en conséquence avant de procéder à l'algèbre nécessaire pour déterminer les coefficients indéterminés.

L'équation auxiliaire associée à l'équation complémentaire est $r^2 + 10r + 25 = 0$, qui a une racine répétée $r = -5$. Ainsi, $\left\{e^{-5x}, xe^{-5x}\right\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation complémentaire.

Supposer la forme de la solution particulière :

Étant donné que $f(x)$ est une fonction exponentielle et que les fonctions exponentielles ne changent jamais d'exposant ou ne disparaissent jamais par différenciation, nous supposons que la solution particulière aura une forme similaire à la composante exponentielle dans $f(x)$. De même, l'exposant dans $f(x)$ diffère de l'exposant dans la solution complémentaire, de sorte qu'aucun ajustement n'est nécessaire.

$$Y_p = Ae^{-2x}$$

Introduire la supposition dans l'équation pour trouver A :

Il faut ensuite introduire la supposition et ses dérivées dans l'équation différentielle afin de déterminer le coefficient indéterminé A.

$$Y_p = Ae^{-2x}, Y'_p = -2Ae^{-2x}, Y''_p = 4Ae^{-2x}$$

$$4Ae^{-2x} - 20Ae^{-2x} + 25Ae^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$$(4A - 20A + 25A)e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$$9Ae^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$$9A = 3$$

$$A = \frac{1}{3}$$

La solution particulière de l'équation différentielle est donc

$$y_p = \frac{1}{3}e^{-2x}$$

Trouver la solution générale :

La solution générale d'une équation non homogène est

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

où y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation complémentaire et y_p est la solution particulière de l'équation non homogène.

$$y = \frac{1}{3}e^{-2x} + c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=174

Exemple 3.4.3 : Fonction de forçage similaire à la solution complémentaire avec racine répétée

Trouver la solution générale de l'équation suivante.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10\frac{dy}{dx} + 25y = e^{-5x}$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution complémentaire :

L'équation complémentaire est similaire à celle de l'exemple 3.4.2. Ainsi, $\left\{e^{-5x}, xe^{-5x}\right\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation complémentaire et la solution complémentaire est $y_c = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$.

Supposer la forme de la solution particulière :

Notre supposition initiale est $Y_p = Ae^{-5x}$. Cependant, comme e^{-5x} est aussi la solution complémentaire, il faut ajuster notre supposition. Étant donné que $r = -5$ est une racine répétée, nous multiplions notre suppositions originale par x^2.

$$Y_p = Ax^2e^{-5x}$$

Introduire la supposition dans l'équation pour trouver A :

Il faut ensuite introduire la supposition et ses dérivées dans l'équation différentielle afin de déterminer le coefficient indéterminé A.

$$Y_p = Ax^2e^{-5x},$$
$$Y'_p = Ae^{-5x}\left(2x - 5x^2\right),$$
$$Y''_p = -5Ae^{-5x}\left(2x - 5x^2\right) + Ae^{-5x}(2 - 10x)$$
$$Y''_p = Ae^{-5x}\left(25x^2 - 20x + 2\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10\frac{dy}{dx} + 25y = e^{-5x}$$

$$Ae^{-5x}\left(25x^2 - 20x + 2\right) + 10Ae^{-5x}\left(2x - 5x^2\right) + 25Ax^2e^{-5x} = e^{-5x}$$

En factorisant le terme exponentiel et en rassemblant les termes semblables, on obtient

$$Ae^{-5x}\left(25x^2 - 20x + 2 + 20x - 50x^2 + 25x^2\right) = e^{-5x}$$
$$Ae^{-5x}(2) = e^{-5x}$$
$$2A = 1$$
$$A = \frac{1}{2}$$

La solution particulière de l'équation différentielle est donc

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-5x}$$

Trouver la solution générale :

La solution générale est

$$y = y_p + y_c$$
$$y = \frac{1}{2}x^2e^{-5x} + c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=174

Exemple 3.4.4 : Résoudre le PVI avec une équation non homogène

Résoudre le problème de valeur initiale suivant.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+10\frac{dy}{dx}+25y=e^{-5x},\quad y(0)=2,\ y'(0)=\ -3$$

Afficher/Masquer la solution

Trouver la solution générale :

L'équation est similaire à celle de l'exemple 3.4.3. La solution générale est donc

$$y=\frac{1}{2}x^2e^{-5x}+c_1e^{-5x}+c_2xe^{-5x}$$

Appliquer les conditions initiales :

Appliquer la condition initiale à y :

$$\begin{aligned} y(0) &= 2\\ c_1e^0 &= 2\\ c_1 &= 2 \end{aligned}$$

Appliquer la condition initiale à y' :

$$y' = xe^{-5x} - \frac{5}{2}x^2e^{-5x} - 5c_1e^{-5x} + c_2\left(e^{-5x} - 5xe^{-5x}\right)$$
$$y'(0) = -3$$
$$-5c_1e^0 + c_2\left(e^0\right) = -3$$
$$-5c_1 + c_2 = -3$$

En introduisant cela dans $c_1 = 2$, on obtient $c_2 = 7$.

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{-5x} + 2e^{-5x} + 7xe^{-5x}$$

Remarque : les conditions initiales doivent satisfaire la solution tout entière de l'équation non homogène, et non pas seulement la partie complémentaire. Il faut donc appliquer les conditions initiales directement à la solution générale de l'équation non homogène donnée pour déterminer les constantes.

La section suivante synthétise les formes appropriées de supposition pour différents types de fonctions de forçage et explique comment modifier ces suppositions si une partie quelconque de la fonction de forçage $f(x)$ correspond à des solutions de l'équation complémentaire.

Méthode des coefficients indéterminés (supposition de Y_p)

Trouver une solution particulière à l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$f(x)$	Y_p **Supposition**
n^{th} degré polynomial	$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0$
ae^{rx}	Ae^{rx}
$a\cos(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
$b\sin(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
$a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

Remarques

1. Produits exponentiels et polynomiaux : Si $f(x)$ ne contient que des fonctions exponentielles ou des produits de fonction exponentielle et des polynômes et si e^{rx} est aussi la solution de l'équation complémentaire associée, il faut alors multiplier la partie exponentielle de Y_p par x pour une racine simple x^2 pour une racine répétée.

2. Racines complexes : Si $f(x)$ a trait à la racine complexe d'une équation complémentaire, c'est-à-dire si $\alpha + \beta$ est une racine complexe de l'équation auxiliaire associée, il faut alors multiplier la supposition Y_p par x.

3. Produits exponentiels et trigonométriques/polynomiaux : Si $f(x)$ comprend des produits d'une fonction exponentielle et une fonction polynomiale ou trigonométrique, il ne faut retenir que la partie polynomiale ou trigonométrique de la supposition initiale, puis multiplier par la partie exponentielle de $f(x)$.

4. Produits polynomiaux et trigonométriques : Si $f(x)$ comprend des produits de fonctions polynomiales et trigonométriques, il faut d'abord noter la supposition pour la fonction polynomiale uniquement, puis multiplier par le cosinus approprié, puis ajouter une autre fonction polynomiale supposée avec différents coefficients et multiplier par le sinus approprié.

Exemple 3.4.5 : Trouver la forme de la solution particulière

Trouver la forme d'une solution particulière à

$$y'' + y' - 6y = f(x)$$

où $f(x)$ est

a) $5\cos(4x)$ **b)** $3x^2\sin(\pi x)$ **c)** $7xe^{2x}\cos(8x)$ **d)** $2e^{-3x}$ **e)** $(9x^2+3)e^{2x}$

Afficher/Masquer la solution

L'équation auxiliaire associée à l'équation est $r^2 - r - 6 = 0$, qui a pour racines $r_1 = -3$ et $r_2 = 2$.

a) $Y_p = A\cos(4x) + B\sin(4x)$

b) Cette fonction comprend le produit de fonctions polynomiales (second degré) et trigonométriques. Suivant la ***remarque 4***, il faut d'abord supposer le polynôme et le multiplier par le bon cosinus, puis l'ajouter au produit d'un autre polynôme supposé avec différents coefficients et un sinus.

$$Y_p = \left(A_2x^2 + A_1x + A_0\right)\cos(\pi x) + \left(B_2x^2 + B_1x + B_0\right)\sin(\pi x)$$

b) Cette fonction comprend le produit de fonctions exponentielles, polynomiales (premier degré) et trigonométriques. Suivant les ***remarques 3 et 4***, il faut d'abord supposer le polynôme et le multiplier par le bon cosinus, puis l'ajouter au produit d'un autre polynôme supposé avec différents coefficients et un sinus. Enfin, il faut multiplier la partie exponentielle

$$Y_p = e^{2x}((A_1x + A_0)\cos(8x) + (B_1x + B_0)\sin(8x))$$

d) Étant donné que $r = -3$ est la racine de l'équation auxiliaire et donc que e^{-3x} est une solution de l'ensemble fondamental, Ae^{-3x} n'est pas une supposition correcte. Suivant la ***remarque 1***, il faut le multiplier par x. Par conséquent,

$$Y_p = Axe^{-3x}$$

b) Cette fonction comprend le produit de fonctions exponentielles et polynomiales (second degré). Suivant la ***remarque 3***, il faut d'abord supposer le polynôme et multiplier la partie exponentielle. La supposition polynomiale sera $A_2x^2 + A_1x + A_0$. La partie exponentielle e^{2x} doit être multipliée par x car e^{2x} est dans l'ensemble fondamental de solutions (***remarque 1***). Par conséquent,

$$Y_p = xe^{2x}\left(A_2x^2 + A_1x + A_0\right)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=174

Section 3.4 Exercices

1. Trouve la solution particulière de l'EDO

$$y'' + 8y' + 16y = -12e^{-4x}$$

Afficher/Masquer la réponse

$y_p = -6x^2e^{-4x}$

2. Trouve la solution générale de l'EDO

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 17y = 5e^{-4t}$$

Afficher/Masquer la réponse

$y(t) = c_1e^{-t}\cos(4t) + c_2e^{-t}\sin(4t) + \frac{1}{5}e^{-4t}$

3. Trouve la solution particulière de l'EDO

$$y'' + 12y' + 40y = 4\cos(10x)$$

Afficher/Masquer la réponse

$y_p = \frac{2}{75}\sin(10x) - \frac{1}{75}\cos(10x)$

4. Résous le problème de valeur initiale

$$y'' - 3y' - 10y = 7e^{-2x}, \ \ y(0) = 1, \ y'(0) = -17$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(x) = 3e^{-2x} - 2e^{5x} - xe^{-2x}$$

5. Résous le problème de valeur initiale

$$y'' + y' - 6y = 12t - 62, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 1$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = -3e^{-3t} - 3e^{2t} - 2t + 10$$

3.5 MÉTHODE DE VARIATION DES PARAMÈTRES

A. Introduction

La méthode de variation des paramètres est une autre technique permettant de trouver des solutions particulières à des équations différentielles linéaires non homogènes. Elle est particulièrement utile pour les équations à coefficients constants et variables et s'applique lorsque la fonction de forçage, $f(x)$, rend la méthode des coefficients indéterminés impraticable. Cette technique s'applique également aux équations d'ordre supérieur.

Contrairement à la méthode des coefficients indéterminés, où la solution complémentaire permet de deviner la forme de la solution particulière, la variation des paramètres a besoin de la solution complémentaire pour déterminer la solution particulière.

B. Variation des paramètres : équations à coefficients constants

Nous nous concentrons d'abord sur l'application de la méthode de variation des paramètres aux équations non homogènes à coefficients constants. Considérons l'équation linéaire non homogène du second ordre

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{3.5.1}$$

Soit $\{y_1, y_2\}$ un ensemble fondamental de solutions à l'équation complémentaire (homogène) associée. La solution générale de l'équation complémentaire est $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Pour trouver une solution particulière, y_p, grâce à la méthode de variation des paramètres, on remplace les constantes c_1 et c_2 par les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$, respectivement, soit

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

Le but est de remplacer y_p et ses dérivées dans l'équation 3.5.1 afin de déterminer des fonctions u_1 et u_2. La dérivée première de y_p est

$$y_p' = u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2$$

Comme nous avons plus de paramètres que d'équations, on décide que $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ **(i)** pour simplifier les calculs. Par conséquent, y'_p est simplifié comme suit :

$$y'_p = u_1y_1' + u_2y_2'$$

Il faut ensuite trouver y_p''.

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

Après avoir remplacé y_p et ses dérivées dans l'équation 3.5.1 et rassemblé les termes, on obtient

$$u_1\underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + u_2\underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0} + a(u_1'y_1' + u'_2y_2') = f(x)$$

Les expressions multipliées par u_1 et u_2 sont nulles, puisque y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation complémentaire, d'où

$$u_1{}'y_1{}' + u_2{}'y_2{}' = \frac{f(x)}{a} \quad \textbf{(ii)}.$$

En combinant **(i)** et **(ii)**, on obtient un système d'équations

$$\begin{cases} u_1{}'y_1 + u_2{}'y_2 = 0 \\ u_1{}'y_1{}' + u_2{}'y_2{}' = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$$

En résolvant le système pour $u_1{}'$ et $u_2{}'$, puis en les intégrant, on obtient les solutions pour u_1 et u_2.

$$u_1{}' = \frac{-f(x)y_2}{a(y_1y_2{}' - y_1{}'y_2)} \text{ et } u_2{}' = \frac{f(x)y_1}{a(y_1y_2{}' - y_1{}'y_2)}$$

Notez que le terme entre parenthèses est le dénominateur dans le wronskien (W). Par conséquent, $u_1{}'$ et $u_2{}'$ peuvent également s'écrire sous la forme

$$u_1{}' = \frac{-f(x)y_2}{aW(y_1, y_2)} \text{ et } u_2{}' = \frac{f(x)y_1}{aW(y_1, y_2)}$$

Méthode de variation des paramètres pour des équations à coefficients constants

Pour trouver une solution particulière à l'équation 3.5.1,

1. Trouver une solution à l'équation homogène : déterminer un ensemble fondamental de solutions $\{y_1, y_2\}$ à l'équation homogène correspondante et trouver le wronskien des solutions.

2. Déterminer u_1 et u_2: calculer $u_1{}'$ et $u_2{}'$ en utilisant le système dérivé de la variation des paramètres. Les intégrer ensuite pour trouver u_1 et u_2, en prenant une constante d'intégration de zéro :

$$u_1 = \int \frac{-f(x)y_2}{aW(y_1, y_2)}dx \quad \text{et} \quad u_2 = \int \frac{f(x)y_1}{aW(y_1, y_2)}dx$$

3. Élaborer la solution particulière : combiner u_1, u_2, y_1, et y_2 pour former la solution particulière :

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

Exemple 3.5.1 : Trouver une solution particulière à une équation à coefficients constants

Trouver une solution particulière à

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}\arctan(x)$$

Afficher/Masquer la solution

Pour trouver une solution particulière avec la méthode de variation des paramètres, il faut d'abord trouver une solution à l'équation homogène associée.

1. La caractéristique polynomiale de l'équation complémentaire $y'' + 6y' + 9y = 0$ est

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$
$$(r+3)^2 = 0$$

La solution est donc une racine répétée $r = -3$. Partant, $y_1 = e^{-3x}$ et $y_2 = xe^{-3x}$ forment un ensemble fondamental de solutions.

Le wronskien de l'ensemble fondamental est

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$
$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x}(1-3x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{-6x}(1-3x) + 3xe^{-6x}$$
$$= e^{-6x}$$

2. Ensuite, il faut remplacer $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = xe^{-3x}$, $f(x) = e^{-3x}\arctan(x)$ et $W(y_1, y_2) = e^{-6x}$ dans des formules pour u_1 et u_2 afin de les déterminer.

Trouver u_1 *:*

$$u_1 = \int \frac{-f(x)y_2}{aW(y_1, y_2)}dx$$
$$= \int \frac{-e^{-3x}\arctan(x)\left(xe^{-3x}\right)}{e^{-6x}}dx$$
$$= -\int x\arctan(x)dx$$

Cette intégrale peut être évaluée au moyen de la technique d'intégration par parties.

$$= -\frac{1}{2}x^2\arctan(x) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\arctan(x) + \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) + C$$

Trouver u_2 *:*

$$u_2 = \int \frac{f(x)y_1}{aW(y_1, y_2)}dx$$
$$= \int \frac{e^{-3x}\arctan(x)(e^{-3x})}{e^{-6x}}dx$$
$$= \int \arctan(x)dx$$

Cette intégrale peut être évaluée au moyen de la technique d'intégration par parties.

$$= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Comme il ne nous faut qu'une solution particulière, nous définissions une constante nulle pour les intégrations dans u_1 et u_2 par souci de simplicité.

3. Il faut maintenant remplacer u_1 et u_2 par $\{y_1, y_2\}$ dans l'expression de y_p pour obtenir une solution particulière :

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^2\arctan(x) + \frac{1}{2}(x - \arctan(x))\right)e^{-3x} +$$
$$\left(x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)xe^{-3x}$$
$$y_p = \frac{1}{2}e^{-3x}\left(x^2\arctan(x) + x - \arctan(x) - x\ln(1+x^2)\right)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=176

Exemple 3.5.2 : Trouver une solution générale à une équation à coefficients constants

Trouver **(a)** une solution particulière, puis **(b)** une solution générale à

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

Afficher/Masquer la solution

a) Pour trouver une solution générale, il faut d'abord trouver une solution particulière. Pour trouver une solution particulière avec la méthode de variation des paramètres, il faut d'abord trouver un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène associée :

1. La caractéristique polynomiale de l'équation complémentaire $y'' + 3y' + 2y = 0$ est

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$
$$(r+1)(r+2) = 0$$

Les solutions sont donc $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$ et $y_1 = e^{-x}$ et $y_2 = e^{-2x}$ constituent un ensemble fondamental de solutions.

2. Il faut ensuite trouver u_1 et u_2 en remplaçant $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$ et $W(y_1, y_2) = -e^{-3x}$ dans

$$u_1 = \int \frac{-f(x)y_2}{aW(y_1,y_2)}dx$$
$$= \int \frac{-1/(e^x+1)e^{-2x}}{-e^{-3x}}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x) + C$$

et

$$u_2 = \int \frac{f(x)y_1}{aW(y_1,y_2)}dx$$
$$= \int \frac{1/(e^x+1)e^{-x}}{-e^{-3x}}dx = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x) - e^x + C$$

Comme nous n'avons besoin que d'une seule solution particulière, nous définissons les deux constantes sur zéro à des fins de simplicité.

3. Il faut maintenant remplacer u_1 et u_2 par $\{y_1, y_2\}$ dans l'expression de y_p pour obtenir une solution particulière :

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= \ln(1+e^x)e^{-x} + (\ln(1+e^x) - e^x)e^{-2x} \\ &= \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(1+e^x) - e^{-x} \end{aligned}$$

b) Pour trouver une solution générale, il faut ajouter la solution générale à l'équation homogène et à une solution particulière :

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(1+e^x) - e^{-x} \end{aligned}$$

On remarque que les termes $c_1 e^{-x}$ et $-e^{-x}$ sont analogues et peuvent être combinés en $(c_1 - 1)e^{-x}$. Puisque $c_1 - 1 = c_3$, on obtient

$$y(x) = c_3 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(1+e^x)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=176

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=176

C. Variation des paramètres : équations à coefficients variables

Maintenant que nous savons résoudre des équations différentielles homogènes et non homogènes du second ordre à coefficients constants, passons aux équations dont les coefficients sont des fonctions de la variable indépendante. La méthode de variation des paramètres convient tout à fait à ces équations.

Considérations relatives aux équations à coefficients variables

Pour une équation différentielle de la forme

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

des solutions sont attendues sur un intervalle ouvert où les quatre fonctions directrices, $a_2(x),\ a_1(x),\ a_0(x)$ et $g(x)$, sont continues et où $a_2(x)$ n'est pas nul. En standardisant l'équation en la divisant par $a_2(x)$, on obtient

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Théorème d'existence et d'unicité des solutions : si $p(x)$, $q(x)$ et $f(x)$ sont continus sur un intervalle (a, b) contenant un point x_0, pour n'importe quelles valeurs initiales Y_0 et Y_1, il existe une solution unique $y(x)$ sur le même intervalle que le problème de valeur initiale.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = Y_0,\ y'(x_o) = Y_1$$

Les étapes méthodologiques pour les équations à coefficients variables sont identiques à celles des équations à coefficients constants, à ceci près que l'équation doit être sous forme standard.

Méthode de variation des paramètres pour des équations à coefficients variables

1. **Standardiser l'équation :** diviser l'équation par le coefficient de y'' pour que le coefficient soit égal à un. L'équation doit présenter le format suivant :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

2. Solutions indépendantes linéaires : trouver deux solutions indépendantes linéaires, $\{y_1, y_2\}$ à l'équation homogène correspondante. trouver le wronskien des solutions.

3. Déterminer u_1 et u_2 : calculer u'_1 et u'_2 en utilisant le système dérivé de la variation des paramètres. Les intégrer ensuite pour trouver u_1 et u_2, en prenant une constante d'intégration de zéro :

$$u_1 = \int \frac{-f(x)y_2}{W(y_1, y_2)}dx \quad \text{et} \quad u_2 = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)}dx$$

4. Élaborer la solution particulière : combiner u_1, u_2, y_1, et y_2 pour former la solution particulière :

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Exemple 3.5.3 : Trouver une solution particulière à une équation à coefficients variables

Trouver une solution particulière à l'équation différentielle suivante, sachant que $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^{-1}$ satisfont l'équation homogène correspondante.

$$x^2 y'' - 2y = x + 3x^3, \ (x > 0)$$

Afficher/Masquer la solution

1. Diviser d'abord l'équation par le coefficient de y'' pour lui donner une forme standard.

$$y'' - 2x^{-2}y = x^{-1}(1 + 3x^2), \ (x > 0)$$

2. Pour trouver une solution particulière avec la méthode de variation des paramètres, il faut un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène associée. Les solutions données y_1 et y_2 formeront l'ensemble fondamental si leur wronskien n'est pas nul sur un intervalle ouvert.

Le wronskien de l'ensemble de solutions est

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{vmatrix}$$
$$= -3$$

Le wronskien n'est jamais nul. Partant, l'ensemble de solutions est l'ensemble fondamental de solutions.

3. Il faut ensuite remplacer $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-1}$, $f(x) = x^{-1}(1+3x^2)$ et $W(y_1, y_2) = -3$ dans des formules pour u_1 et u_2 afin de les déterminer.

Trouver u_1 *:*

$$u_1 = \int \frac{-f(x)y_2}{W(y_1, y_2)}dx$$
$$= \int \frac{-x^{-1}(1+3x^2)x^{-1}}{-3}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int (x^{-2}+3)dx$$
$$= \frac{1}{3}(-x^{-1}+3x)+C$$

Avec $C = 0$, on obtient

$$u_1 = -\frac{1}{3}x^{-1} + x$$

Trouver u_2 *:*

$$u_2 = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)}dx$$
$$= \int \frac{x^{-1}(1+3x^2)x^2}{-3}dx$$
$$= -\frac{1}{3}\int (x+3x^3)dx$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^4\right)+C$$

Avec $C = 0$, on obtient

$$u_2 = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

4. Remplacer u_1 et u_2 par $\{y_1, y_2\}$ dans l'expression de y_p de façon à obtenir une solution particulière :

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$\begin{aligned} y_p &= \left(-\frac{1}{3}x^{-1} + x\right)x^2 + \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)x^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^3 \end{aligned}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=176

D. Résumé

- Utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour des équations à coefficients constants avec des fonctions de forçage reconnaissables $f(x)$.
- Utiliser la méthode de variation des paramètres pour des équations à coefficients constants avec une fonction $f(x)$ moins typique ou pour des équations à coefficients variables.
- En général, si un ensemble fondamental de solutions est connu, la variation des paramètres constitue une méthode viable et souvent préférable.

Section 3.5 Exercices

1. Trouve une solution particulière à l'équation

$$y'' - 8y' + 16y = 4e^{4x}\ln x$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_p(x) = 2x^2 e^{4x} \ln(x) - 3x^2 e^{4x}$$

2. Trouve la solution particulière à l'équation

$$y'' + y = \sec(x)$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_p(x) = \cos(x)\ln|\cos(x)| + x\sin(x)$$

3. Trouver une solution particulière à l'équation différentielle suivante, sachant que $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^{-1}$ satisfont l'équation homogène correspondante.

$$x^2 y'' - 2y = 3x - 2x^4, \ (x > 0)$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_p(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{5}x^4$$

3.6 MÉTHODE DE RÉDUCTION D'ORDRE

La méthode de réduction d'ordre est une technique permettant de trouver une deuxième solution à une équation différentielle linéaire du second ordre lorsqu'une solution est déjà connue. Elle est utile aussi bien pour les équations homogènes que pour les solutions non homogènes.

En général, pour appliquer la méthode de réduction d'ordre pour l'équation non homogène

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

on suppose que la deuxième solution y_2 prend la forme $y_2 = uy_1$, où u est une fonction de la variable indépendante. En remplaçant y_2 et ses dérivées dans l'équation et en simplifiant, on obtient une équation du premier ordre en termes de u' :

$$p_1(x)u'' + q_1(x)u' = f(x)$$

Il est alors possible de résoudre cette équation différentielle du premier ordre à l'aide de techniques standard, de l'intégrer pour trouver u, puis de déterminer $y_2 = uy_1$.

Méthode de réduction d'ordre pour des équations homogènes

En partant d'une équation homogène avec une solution connue $y_1(x)$, trouver une deuxième solution linéairement indépendante $y_2(x)$ en procédant comme suit :

1. Standardiser l'équation : diviser l'équation par le coefficient de y'' pour que le coefficient soit égal à un. L'équation doit présenter le format suivant :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

2. Déterminer $\mu(x)$: identifier la fonction $p(x)$, le coefficient de y' et évaluer l'intégrale :

$$\mu(x) = e^{-\int p(x)dx}$$

3. Trouver la deuxième solution y_2 : évaluer l'intégrale suivante pour trouver la deuxième solution : Pour plus de simplicité, disons que la constante d'intégration est nulle.

$$y_2 = y_1 \int \frac{\mu(x)}{(y_1)^2}\,dx$$

4. Formuler la solution générale : la solution générale est la combinaison linéaire des deux solutions :

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$$

Il convient de noter que la constante c_2 peut absorber n'importe quel coefficient numérique de y_2.

Exemple 3.6.1 : Réduction d'ordre pour une équation homogène

Sachant que $y_1(x) = e^{2x}$ est une solution à l'équation donnée, utilise la méthode de réduction d'ordre pour trouver une deuxième solution.

$$xy'' - (4x+4)y' + (4x+8)y = 0, \quad x > 0$$

Afficher/Masquer la solution

1. Tout d'abord, standardiser l'équation en la divisant par le coefficient de y'' :

$$y'' - \frac{4x+4}{x}y' + \frac{4x+8}{x}y = 0$$

2. Identifier $p(x)$, le coefficient de la fonction de y', puis trouver $\mu(x)$.

$$p(x) = -\frac{4(x+1)}{x} \rightarrow$$

» title= »p(x)=-(4(x+1))/x \ -> » class= »asciimath mathjax »>

$$\mu(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{4\int \frac{x+1}{x}dx} = e^{4x+4\ln(x)} = x^4e^{4x}$$

3. La deuxième solution est donnée par

$$y_2 = y_1 \int \frac{\mu(x)}{(y_1)^2}dx$$

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{x^4e^{4x}}{(e^{2x})^2}dx$$

$$= e^{2x} \int x^4 dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5e^{2x} + C$$

Comme nous recherchons la solution y_2 la plus simple, nous définissons une constante d'intégration de zéro. Comme n'importe quel multiple scalaire de y_2 est aussi une solution, on peut choisir $y_2 = x^5e^{2x}$ comme étant la deuxième solution la plus simple.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=178

Bien que principalement détaillés pour les équations homogènes, les principes de cette méthode s'appliquent aux situations non homogènes en résolvant d'abord l'équation homogène associée et en trouvant ensuite une solution particulière au moyen des méthodes standard expliquées pour les équations non homogènes.

Exemple 3.6.2 : Réduction d'ordre pour une équation non homogène; PVI

Sachant que $y_1(x) = x$ est une solution à l'équation complémentaire, résous le problème de valeur initiale suivant.

$$x^2y'' + xy' - y = x^2 + 1, \quad y(1) = 2,\; y'(1) = -3$$

Afficher/Masquer la solution

a. Trouver la deuxième solution de l'équation complémentaire :

Il faut suivre les étapes de la méthode de réduction d'ordre pour trouver la deuxième solution linéairement indépendante à l'équation complémentaire.

1a. Tout d'abord, standardiser l'équation en la divisant par le coefficient de y'' :

$$y'' + x^{-1}y' - x^{-2}y = 0$$

2a. Identifier $p(x)$, le coefficient de la fonction de y', puis trouver $\mu(x)$.

$p(x) = x^{-1} \;\rightarrow$ » title= »p(x)=x^-1 \ -> » class= »asciimath mathjax »>

$\mu(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int x^{-1}dx} = e^{\ln(x)} = x^{-1}$

3a. La deuxième solution est donnée par

$$y_2 = y_1 \int \frac{\mu(x)}{(y_1)^2} dx$$

$$y_2 = x \int \frac{x^{-1}}{x^2} dx$$

$$= x \int x^{-3} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-1} + \cancel{C}^0$$

4a. La solution générale de l'équation complémentaire est

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 x + c_2 \left(-\frac{1}{2} x^{-1}\right)$$

La constante c_2 peut absorber n'importe quel coefficient numérique de y_2. Ainsi, y_c peut être simplifié en

$$y_c = c_1 x + c_2 x^{-1}$$

b. Trouver une solution particulière à l'équation non homogène :

Il faut utiliser la méthode de variation des paramètres pour trouver la solution particulière y_p.

1b. Standardiser l'équation différentielle d'origine.

$$y'' + x^{-1} y' - x^{-2} y = x^{-2}(x^2 + 1)$$

2b. Les solutions de l'équation homogène sont maintenant connues : $y_1 = x$ et $y_2 = x^{-1}$.

Le wronskien de l'ensemble fondamental est

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix}$$

$$= -2x^{-1}$$

3b. Remplacer ensuite $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$, $f(x) = x^{-2}(x^2 + 1)$ et $W(y_1, y_2) = -2x^{-1}$ dans des formules pour u_1 et u_2 afin de les déterminer.

Trouver u_1 *:*

$$u_1 = \int \frac{-f(x) y_2}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$u_1 = \int \frac{-x^{-2}(x^2 + 1) x^{-1}}{-2x^{-1}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x^{-2}(x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + x^{-2})dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Trouver u_2 :

$$u_2 = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)}dx$$
$$u_2 = \int \frac{x^{-2}(x^2+1)x}{-2x^{-1}}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int (x^2+1)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + x\right)$$

4b. Remplacer u_1 et u_2 par $\{y_1, y_2\}$ dans l'expression de y_p de façon à obtenir une solution particulière :

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
$$y_p = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + x\right)x^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}x^2 - 1$$

c. Trouver la solution générale

La solution générale de l'équation non homogène est la somme de la solution particulière et de la solution complémentaire.

$$y = y_p + y_c$$
$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 + c_1 x + c_2 x^{-1}$$

d. Appliquer les conditions initiales

Appliquer la condition initiale à y :

$$y(1) = 2$$
$$\frac{1}{3}(1^2) - 1 + c_1(1) + c_2(1^{-1}) = 2$$
$$\frac{1}{3} - 1 + c_1 + c_2 = 2$$
$$c_1 + c_2 = \frac{8}{3}$$

Appliquer la condition initiale à y' :

$$y'(x) = \frac{2}{3}x + c_1 - c_2 x^{-2}$$
$$y'(1) = -3$$
$$\frac{2}{3}(1) + c_1 - c_2\left(1^{-2}\right) = -3$$
$$c_1 - c_2 = -\frac{11}{3}$$

Pour déterminer c_1 et c_2, il faut résoudre le système suivant de deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{8}{3} \\ c_1 - c_2 = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

La résolution du système donne

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{19}{6}$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{19}{6}x^{-1}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=178

Section 3.6 Exercices

1. Sachant que $y_1(x) = e^{4x}$ est une solution à l'équation donnée, utilise la méthode de réduction d'ordre pour trouver une deuxième solution.

$$xy'' - (8x+1)y' + (16x+4)y = 0, \quad x > 0$$

Afficher/Masquer la réponse

$y_2 = x^2 e^{4x}$

2. Trouver la solution générale de l'équation suivante, sachant que $y_1 = x$ satisfait l'équation complémentaire.

$$x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x^2}$$

Afficher/Masquer la réponse

$y = \dfrac{1}{3x^2} + c_1x + \dfrac{c_2}{x}$

3. Résous le problème de valeur initiale, sachant que $y_1 = x^2$ satisfait l'équation complémentaire.

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^4, \; y(-1) = 3, \; y'(-1) = -3$$

Afficher/Masquer la réponse

$y = x^4 + 2x^2 - 5x^2\ln(|x|)$

3.7 ÉQUATION DE CAUCHY-EULER

L'équation de Cauchy-Euler, également connue sous le nom d'équation d'Euler, est un type d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables qui apparaît dans de nombreuses applications en physique et en ingénierie. Ces équations sont particulièrement remarquables parce que leurs coefficients variables sont des puissances de la variable indépendante.

Les équations de Cauchy-Euler du second ordre présentent généralement la forme suivante :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x) \tag{3.7.1}$$

Ici, a, b, et c sont des constantes et $f(x)$ est une fonction de la variable indépendante**.** L'équation est homogène si $f(x) = 0$ et non homogène dans le cas contraire. Par exemple, $-3x^2y'' + 4xy' + y = \cos x$ est une équation de Cauchy-Euler.

Méthode de résolution d'une équation de Cauchy-Euler homogène

Pour résoudre une équation de Cauchy-Euler homogène 3.7.1,

1. Remplacer et transformer : Soit $y = x^r$ et forme l'équation caractéristique (auxiliaire). Ainsi, $y' = rx^{r-1}$ et $y'' = r(r-1)x^{r-2}$. En remplaçant cela dans l'équation 3.7.1, on obtient

$ar(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0$ $\rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »>

$$x^r(ar(r-1) + br + c) = 0$$

$\rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $ar(r-1) + br + c = 0$

ce qui donne l'**équation caractéristique.**

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

2. Résoudre l'équation caractéristique : Comme pour les équations à coefficients constants, il faut résoudre l'équation quadratique pour r et, selon la nature des racines, la solution aura différentes formes.

Cas n° 1 : deux racines réelles distinctes r_1 et r_1

La solution générale sera la combinaison linéaire de $y_1 = x^{r_1}$ et $y_2 = x^{r_2}$:

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

Cas n° 2 : racine répétée r

La solution générale sera la combinaison linéaire de $y_1 = x^r$ et $y_2 = x^r \ln x$:

$$y = c_1x^r + c_2x^r \ln x$$

Cas n° 3 : racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm \beta i$

La solution générale sera la combinaison linéaire de $y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ et $y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$:

$$y = x^\alpha(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x))$$

Exemple 3.7.1 : Résoudre un problème de valeur initiale avec l'équation de Cauchy-Euler homogène

Résoudre le problème de valeur initiale

$$-x^2y'' + 7xy' - 16y = 0; \quad y(1) = -4,\ y'(1) = -1$$

Afficher/Masquer la solution

L'équation est une équation de Cauchy-Euler.

1. Il faut d'abord trouver son polynôme caractéristique donné $a = -1, b = 7$ et $c = -16$:

$$-r^2 + 8r - 16 = 0$$

L'équation a une racine répétée $r = 4$, qui relève du **cas n° 2**.

2. La solution générale de l'équation est donc

$$y(x) = c_1x^4 + c_2x^4 \ln x$$

3. Utiliser les valeurs initiales pour trouver c_1 et c_2 :

$$y(1) = -4$$

$$c_1(1)^4 + c_2(1)^4 \ln(1) = -4 \rightarrow$$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »>

$$c_1 = -4$$

$$y'(1) = -1$$

$$4c_1(1)^3 + 4c_2(1)^3 \ln(1) + c_2(1)^3 = -1 \rightarrow$$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $c_2 = 15$

La solution du PVI est donc

$$y(x) = -4x^4 + 15x^4 \ln x$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=180

Pour une équation de Cauchy-Euler non homogène, la méthode de variation des paramètres ou des coefficients indéterminés (le cas échéant) est utilisée.

Section 3.7 Exercices

1. Trouve la solution générale de l'équation suivante.

$$-x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$$

Afficher/Masquer la réponse

$y(x) = c_1x^4 + c_2x$

2. Résous le problème de valeur initiale

$$-2x^2y'' - 26xy' - 70y = 0; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2$$

Afficher/Masquer la réponse

$y(x) = \frac{9}{2}x^{-5} - \frac{7}{2}x^{-7}$

3.8 APPLICATION : VIBRATIONS MÉCANIQUES

A. Introduction

En passant ainsi des équations différentielles ordinaires du premier ordre à celles du second ordre, nous allons découvrir diverses applications qui peuvent être modélisées par ces équations d'ordre supérieur. Dans cette section et les suivantes, nous abordons deux grands domaines où les équations différentielles du second ordre sont largement appliquées : les vibrations mécaniques et les circuits électriques (circuits RLC). Fondamentaux en ingénierie et en physique, ces domaines fournissent de précieux contextes pour comprendre le comportement des systèmes dynamiques.

L'étude des vibrations mécaniques est cruciale pour la conception et l'analyse des systèmes qui subissent des mouvements oscillatoires. La compréhension des vibrations aide les ingénieurs à réduire le bruit, à prévenir les défaillances catastrophiques dues à la résonance et à optimiser les performances de divers systèmes mécaniques, allant des bâtiments et des ponts aux suspensions de véhicules et aux composants électroniques. La modélisation de ces systèmes permet aux ingénieurs de prévoir les réponses à divers stimuli, garantissant ainsi la sécurité et la fonctionnalité.

Pour modéliser un système vibratoire, nous nous servons généralement d'une représentation simplifiée impliquant des masses, des ressorts et des amortisseurs. Ces éléments illustrent la dynamique essentielle de systèmes réels plus complexes. En utilisant les lois du mouvement de Newton ou des méthodes énergétiques, nous développons un modèle mathématique qui se traduit généralement par une équation différentielle du second ordre.

B. Composants d'un système ressort-masse

Le système consiste en une masse, typiquement désignée par m, qui représente l'objet en mouvement. Un ressort au coefficient de rigidité $k > 0$0″ title= »k>0″ class= »asciimath mathjax »> lui est attaché, produisant une force de rappel proportionnelle et opposée au déplacement par rapport à sa position d'équilibre, conformément à la loi de Hooke. Dans de nombreux scénarios pratiques, ce système peut également être doté d'un composant amortisseur caractérisé par un coefficient d'amortissement$c$, représentant la résistance au mouvement due à des facteurs tels que la résistance de l'air ou le frottement interne dans le système. L'amortisseur exerce une force qui est proportionnelle à la vitesse de la masse, mais dans la direction opposée au mouvement. En outre, le système peut être soumis à une force externe $F(t)$, qui peut varier dans le temps et induire des vibrations forcées.

Considérons le système masse-ressort illustré à la figure 3.8.1. Le ressort a une longueur naturelle de l_0 lorsqu'il n'est pas étiré. Lorsqu'on attache une masse m au ressort, celui-ci s'étire d'une longueur l. Le point où la masse s'immobilise et où le ressort cesse de s'étirer est la position d'**équilibre**. À ce point, le système est stable et la masse reste immobile tant que rien ne vient la perturber. Dans ce système, nous définissons y comme le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, où les valeurs positives indiquent un mouvement vers le haut.

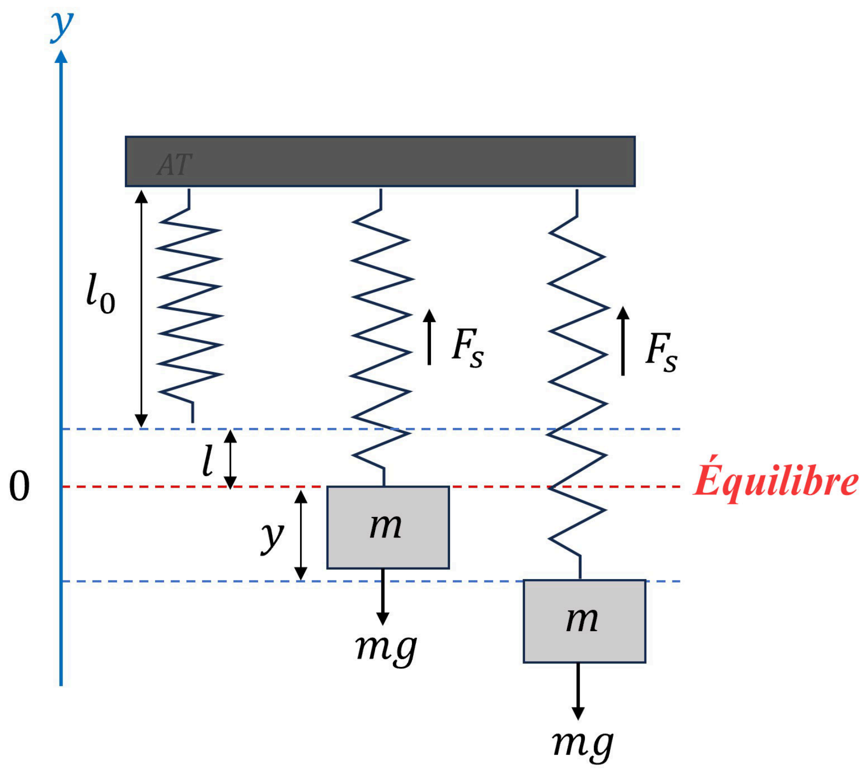


Figure 3.8.1. Système masse-ressort sans amortisseur

C. Équation différentielle générale de modélisation du système

Pour dériver l'équation régissant le mouvement d'un système ressort-masse-amortisseur, nous appliquons la deuxième loi du mouvement de Newton, qui établit la force nette agissant sur la masse et son accélération. Les principales forces agissant sur la masse dans un système ressort-masse sont les suivantes :

- Force due à la pesanteur $F_g = mg$ agissant vers le bas.
- Force de rappel du ressort $F_s = -k(l + y)$, où k est la constante du ressort. Cette force est définie par la loi de Hooke et est généralement proportionnelle au déplacement par rapport à la longueur naturelle du ressort (l_0) et de direction opposée.
- Force d'amortissement $F_d = -cy'$, où c est le coefficient d'amortissement. Si elle est présente, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse de la masse, mais dans la direction opposée au mouvement.

- Force externe $F(t)$. Il s'agit de toute force agissant sur le système, qui peut être périodique ou aléatoire, et induisant des vibrations forcées.

D'après la deuxième loi du mouvement de Newton,

$$ma = \sum F$$

En substituant toutes les forces et en écrivant l'accélération comme la dérivée seconde du déplacement, on obtient

$$my'' = F_g + F_s + F_d + F(t)$$
$$my'' = mg - k(l + y) - cy' + F(t)$$
$$my'' + cy' + ky = mg - kl + F(t)$$

Au point d'équilibre, la somme de toutes les forces agissant sur la masse est égale à zéro. Par conséquent,

$$\sum F = 0$$
$$F_g + F_s = 0$$
$$mg - kl = 0$$
$$mg = kl$$

Si l'on simplifie l'équation en introduisant $mg = kl$ pour se concentrer sur les écarts par rapport à l'équilibre, on obtient la forme standard de l'équation de vibration.

$$my'' + cy' + ky = F(t) \tag{3.8.1}$$

Ici, y est le déplacement par rapport à la position d'équilibre, y' est la vitesse, y'' est l'accélération et $F(t)$ représente toute force externe appliquée sur le système. On résout généralement cette équation avec les conditions initiales pour le déplacement initial de la position d'équilibre : $y(0) = y_0$ et la vitesse initiale : $y'(0) = y'_0$.

Selon les forces qui agissent sur le système, il existe plusieurs cas particuliers :

- **Vibration libre non amortie ($c = 0,\ F(t) = 0$)** : la forme la plus simple de vibration se produit lorsqu'il n'y a ni amortissement, ni force externe. Le système oscille à sa fréquence naturelle, déterminée par la masse et la constante du ressort.
- **Vibration libre amortie ($c > 0,\ F(t) = 0$)** : lorsque l'amortissement est présent mais qu'il n'y a pas de force extérieure, le système subit des vibrations amorties qui entraînent une diminution progressive de l'amplitude de l'oscillation au fil du temps. La nature de l'amortissement (sous-amortissement, amortissement critique, sur-amortissement) dépend des valeurs de m, c et k.
- **Vibration forcée non amortie ($c = 0,\ F(t) \neq 0$)** : lorsqu'une force externe agit sur le système, celui-ci subit des vibrations forcées. Si la fréquence de la force externe est proche de la fréquence naturelle du système, il peut y avoir de la résonance,entraînant des oscillations de grande amplitude.
- **Vibration forcée amortie ($c > 0,\ F(t) \neq 0$)** : c'est le cas le plus général, qui combine les effets de l'amortissement et de la force externe, induisant un comportement oscillatoire complexe.

D. Vibration libre non amortie

la forme la plus simple de vibration se produit lorsqu'il n'y a ni amortissement ($F_d = 0$), ni force externe. ($F(t) = 0$). En ce cas, l'équation 3.8.1 se réduit à

$$my'' + ky = 0 \tag{3.8.2}$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. En résolvant l'équation caractéristique $mr^2 + k = 0$, on observe que les racines sont des racines complexes conjuguées données par

$$r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le terme $\sqrt{\frac{k}{m}}$ est la fréquence naturelle du système, indiquée par ω_0. La solution de l'équation est donc exprimée sous la forme

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \tag{3.8.3}$$

Il est souvent commode de représenter le déplacement sous forme d'amplitude-phase avec une seule fonction trigonométrique

$$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \phi) \tag{3.8.4}$$

Ici, R est l'amplitude de l'oscillation, donnée par $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, et ϕ est l'angle de phase, qui peut être déterminé à partir des conditions initiales du système. L'angle de phase ϕ est généralement choisi de façon à satisfaire $-\pi \leq \phi < \pi$ pour l'unicité et est lié à c_1 et c_2.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right),$$

$$\cos(\phi) = \frac{c_1}{R} = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \text{ et } \sin(\phi) = \frac{c_2}{R} = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

Le mouvement décrit par l'équation 3.8.4 est connu sous le nom de mouvement harmonique simple, caractérisé par sa nature sinusoïdale et sa fréquence constante. La période du mouvement est $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, représentant le temps qu'il faut pour effectuer un cycle complet.

Considérations relatives aux unités et à l'angle de phase

- **Unités :** lorsque l'on travaille sur l'accélération due à la pesanteur ou sur toute autre grandeur physique, il est important d'utiliser des unités cohérentes tout au long du calcul. Dans le système métrique, g correspond généralement à $9{,}81 \text{ m}/\text{s}^2$ et les longueurs doivent être exprimées en mètres et les masses en kilogrammes. Dans le système impérial, g correspond à $32 \text{ pied}/\text{s}^2$, avec les longueurs en pieds et la masse en slugs.

- **Unicité des angles de phase :** il existe une infinité d'angles de phase qui satisfont aux équations trigonométriques en raison de leur nature périodique. Cependant, la sélection de ϕ dans l'intervalle $[-\pi, \pi)$ garantit l'obtention d'une solution dans un cycle complet. Les signes de c_1 et c_2 déterminent le quadrant dans lequel ϕ se trouve.
    - Si $c_1, c_2 > 0$, ϕ est dans le premier quadrant.
    - Si $c_1 < 0,\ c_2 > 0$, ϕ est dans le deuxième quadrant.
    - Si $c_1,\ c_2 < 0$, ϕ est dans le troisième quadrant.
    - Si $c_1 > 0,\ c_2 < 0$, ϕ est dans le quatrième quadrant.

Exemple 3.8.1 : Mouvement harmonique simple

Un ressort vertical de 150 cm de long est suspendu à un plafond fixe. Un objet de 2 kg est attaché à l'extrémité inférieure du ressort, et le ressort s'allonge à 155 cm là où l'objet est en équilibre. L'objet est ensuite tiré vers le bas sur 3 cm supplémentaires, puis relâché avec une vitesse initiale de 20 cm/s vers le haut. En supposant qu'il n'y a pas d'amortissement et qu'aucune force extérieure autre que la gravité n'agit sur le système :

a) Déterminer le déplacement de l'objet en fonction du temps.

b) Déterminer la fréquence naturelle, la période et l'angle de phase du mouvement.

c) Réécrire l'équation du mouvement sous la forme amplitude-phase $y(t) = R\cos(\omega_0 t - \phi)$.

Exprimer les réponses en unités CGS, où $g = 980 \text{ cm}/\text{s}^2$.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Longueur naturelle du ressort : $l_0 = 150 \text{ cm}$
- Longueur à la position d'équilibre avec un objet de 2 kg attaché : $l_0 + l = 155 \text{ cm}$
- Masse de l'objet : $m = 2 \text{ kg} = 2\,000 \text{ g}$
- Déplacement initial (descendant) : $y_0(0) = -3 \text{ cm}$
- Vitesse initiale (ascendante) : $y'_0(0) = 20 \text{ cm}/\text{s}$

a)

Calculer la constante du ressort

À l'équilibre, les forces agissant sur l'objet sont équilibrées, de sorte que $F_g = F_s$. Cela permet de déterminer la constante du ressort k.

$mg = k(l) \to \frac{k}{m} = \frac{g}{l}$ \ k/m=g/(l) » title= »mg=k(l) ->\ k/m=g/(l) » class= »asciimath mathjax »>

$$\frac{k}{m} = \frac{980}{5} = 196$$

$$k = 196(2000) = 392\ 000 \text{ dynes/cm}$$

Calculer la fréquence naturelle :

La fréquence naturelle est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{196} = 14$$

Il convient de noter que, pour trouver ω_0, nous avons besoin du ratio de k et de m, et non de leurs valeurs individuelles.

Trouver la solution générale :

Étant donné qu'il n'y a ni amortissement, ni force externe, le problème de valeur initiale est

$$2y'' + 392y = 0, \quad y_0(0) = -3, \; y'_0(0) = 20$$

La solution générale de cette équation est donnée par l'équation 3.8.3.

$$y(t) = c_1 \cos(14t) + c_2 \sin(14t)$$

Appliquer les conditions initiales :

$$\begin{gathered} y_0(0) = -3 \\ c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = -3 \\ c_1 = -3 \\ y'(t) = -14c_1 \sin(14t) + 14c_2 \cos(14t) \\ y'_0(0) = 20 \\ -14c_1 \sin(0) + 14c_2 \cos(0) = 20 \\ 14c_2 = 20 \\ c_2 = \frac{10}{7} \end{gathered}$$

L'équation du déplacement de l'objet est donc

$$y(t) = -3\cos(14t) + \frac{10}{7}\sin(14t)$$

b)

Fréquence naturelle : $\omega_0 = 14 \text{ rad/s}$

Période : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{7}$ s

L'**amplitude** R est donnée par

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$R = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{10}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{541}$$

Angle de phase :

L'angle de phase de référence est déterminé par

$$\phi = \tan^{-1}\left(\left|\frac{c_2}{c_1}\right|\right)$$

$$\phi_R = \tan^{-1}\left(\left|\frac{10/7}{-3}\right|\right) \approx 0{,}444 \text{ rad}$$

Puisque $c_1 < 0$ ($\cos(\phi) < 0$) et $c_2 > 0$ ($\sin(\phi) > 0$), ϕ devrait se trouver dans le deuxième quadrant. Par conséquent,

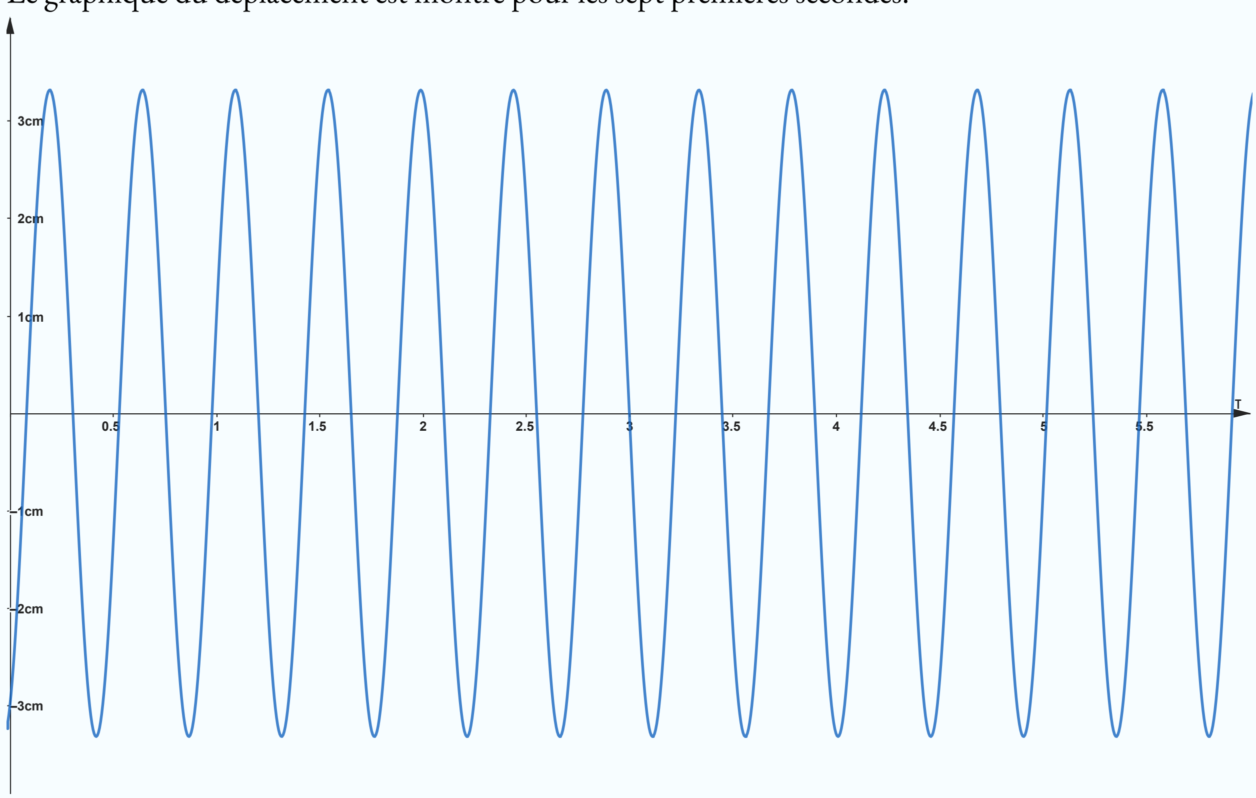
$$\phi = \pi - \phi_R \approx 2{,}697 \text{ rad.}$$

c) L'équation peut être rédigée sous la forme

$$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$y(t) = \frac{1}{7}\sqrt{541}\cos(14t - 2{,}697)$$

Le graphique du déplacement est montré pour les sept premières secondes.



Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=182

E. Vibration libre amortie

Dans une vibration libre amortie, il n'y a pas de force externe ($F(t) = 0$). Partant, l'équation 3.8.1 est simplifiée en une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{3.8.5}$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. En résolvant l'équation caractéristique $mr^2 + cr + k = 0$ avec la formule quadratique, on trouve les racines

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\,mk}}{2\,m}$$

En fonction du discriminant $c^2 - 4\,mk$, on trouve trois types de mouvement :

1. Amortissement critique ($c^2 - 4\,mk = 0$**)**

En ce cas, il y a une racine répétée $r = -\dfrac{c}{2\,m}$, de sorte que la solution générale de l'équation 3.8.5 devient

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{c}{2m}t} \tag{3.8.6}$$

Ici, le mouvement subit un amortissement critique car l'amortissement est juste suffisant pour empêcher l'oscillation. Ce niveau d'amortissement est atteint lorsque le coefficient d'amortissement c

$$c^2 - 4\,mk = 0$$

$$c^2 = 4\,mk$$

$$c = 2\sqrt{mk}$$

$2\sqrt{mk}$ est appelé coefficient d'amortissement critique et est transcrit par C_{cr}.

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk}$$

Il convient de noter que plus le temps passe ($t \to \infty$), plus le déplacement $y(t)$ approche de zéro, indiquant que le système se stabilise rapidement et en douceur à sa position d'équilibre, sans oscillation ni dépassement de la position d'équilibre, comme le font les amortisseurs dans les systèmes de suspension automobiles.

2. Suramortissement ($c^2 - 4mk > 0$)

En ce cas, il y a deux racines réelles distinctes $r_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\,mk}}{2\,m}$, toutes deux négatives. La solution générale de l'équation 3.8.5 devient

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{3.8.7}$$

Comme r_1 et r_2 sont négatifs, plus le temps passe ($t \to \infty$), plus le déplacement $y(t)$ approche de zéro et le système revient graduellement à l'équilibre sans osciller. Il y a suramortissement lorsque $c > c_{cr}$, typiquement souhaité dans les systèmes où le dépassement de la position d'équilibre, risque d'être néfaste ou indésirable, comme dans les équipements lourds. Les systèmes suramortis reviennent plus lentement à l'équilibre que les systèmes à amortissement critique. Cette réponse plus lente s'explique par la force d'amortissement plus élevée appliquée, qui empêche l'oscillation mais résiste également au mouvement, ce qui entraîne un retour lent.

3. Sous-amortissement ($c^2 - 4mk < 0$)

En ce cas, les racines de l'équation caractéristique sont des racines complexes conjuguées données par

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2\,m} \pm \frac{\sqrt{4\,mk - c^2}}{2\,m} i = -\frac{c}{2\,m} \pm \omega_1 i$$

La solution générale de l'équation 3.8.5 est donc

$$y(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}(c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)) \tag{3.8.8}$$

Le terme $\omega_1 = \dfrac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$ est lié à la fréquence d'oscillation. Comme pour le mouvement harmonique, on peut dériver la forme amplitude-phase de l'équation du mouvement.

$$y(t) = Re^{-\frac{c}{2m}t} \cos(\omega_1 t - \phi) \tag{3.8.9}$$

Là encore,

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},\ \cos(\phi) = \frac{c_1}{R}, \text{ et } \sin(\phi) = \frac{c_2}{R}$$

Un système sous-amorti se caractérise par un coefficient d'amortissement $c < c_{cr}$. Dans ce scénario, l'amortissement ne suffit pas à arrêter les oscillations, si bien que le système affiche un comportement oscillatoire autour de la position d'équilibre. L'amplitude de ces oscillations diminue au fil du temps, représentée par le terme variable dans le temps $Re^{-\frac{c}{2m}t}$. Comme l'exposant $-\dfrac{c}{2\,m}$ est toujours négatif, $y(t)$ se rapproche graduellement de zéro au fil du temps ($t \to \infty$). Il s'ensuit une réponse élastique du système à la moindre perturbation.

Ce comportement est souvent celui qui est préféré dans diverses applications. Dans les instruments de musique, par exemple, les vibrations sous-amorties des cordes ou des membranes contribuent à produire un son soutenu et résonnant. De même, les amortisseurs sismiques dans les bâtiments utilisent une réponse sous-amortie contrôlée pour dissiper en toute sécurité l'énergie des tremblements de terre, ce qui permet aux structures d'osciller et de réduire les contraintes sans s'effondrer.

Exemple 3.8.2 : Mouvement à amortissement critique

Une masse de 1 kg est attachée à un ressort d'une rigidité de 64 N/m et à un amortisseur avec une constante d'amortissement de 16 N.s/m. L'objet est comprimé à 20 cm au-dessus de son point d'équilibre, puis relâché avec une vitesse initiale de 2 m/s. Trouver le déplacement de l'objet en fonction du temps.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Masse de l'objet : $m = 1\ \mathrm{kg}$
- Constante d'amortissement : $c = 16\ \mathrm{N \cdot s/m}$
- Constante du ressort : $k = 64\ \mathrm{N/m}$
- Déplacement initial (ascendant) : $y_0(0) = 20\ \mathrm{cm} = 0{,}2\ \mathrm{m}$
- Vitesse initiale (ascendante) : $y'_0(0) = 2\ \mathrm{m/s}$

Le problème de valeur initiale pour ce système est

$$y'' + 16y' + 64y = 0, \quad y_0(0) = 0{,}2, \quad y'_0(0) = 2$$

Avant de résoudre le PVI, on peut calculer le coefficient d'amortissement critique afin de déterminer le type d'amortissement.

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk}$$
$$c_{cr} = 2\sqrt{1(64)} = 16$$

Le coefficient d'amortissement est égal au coefficient d'amortissement critique ($c = c_{cr} = 16$), de sorte que le système présente un amortissement critique.

Trouver la solution générale :

La solution générale d'un système à amortissement critique est donnée par l'équation 3.8.6.

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{c}{2m}t}$$
$$y(t) = c_1 e^{-8t} + c_2 t e^{-8}$$

Appliquer les conditions initiales :

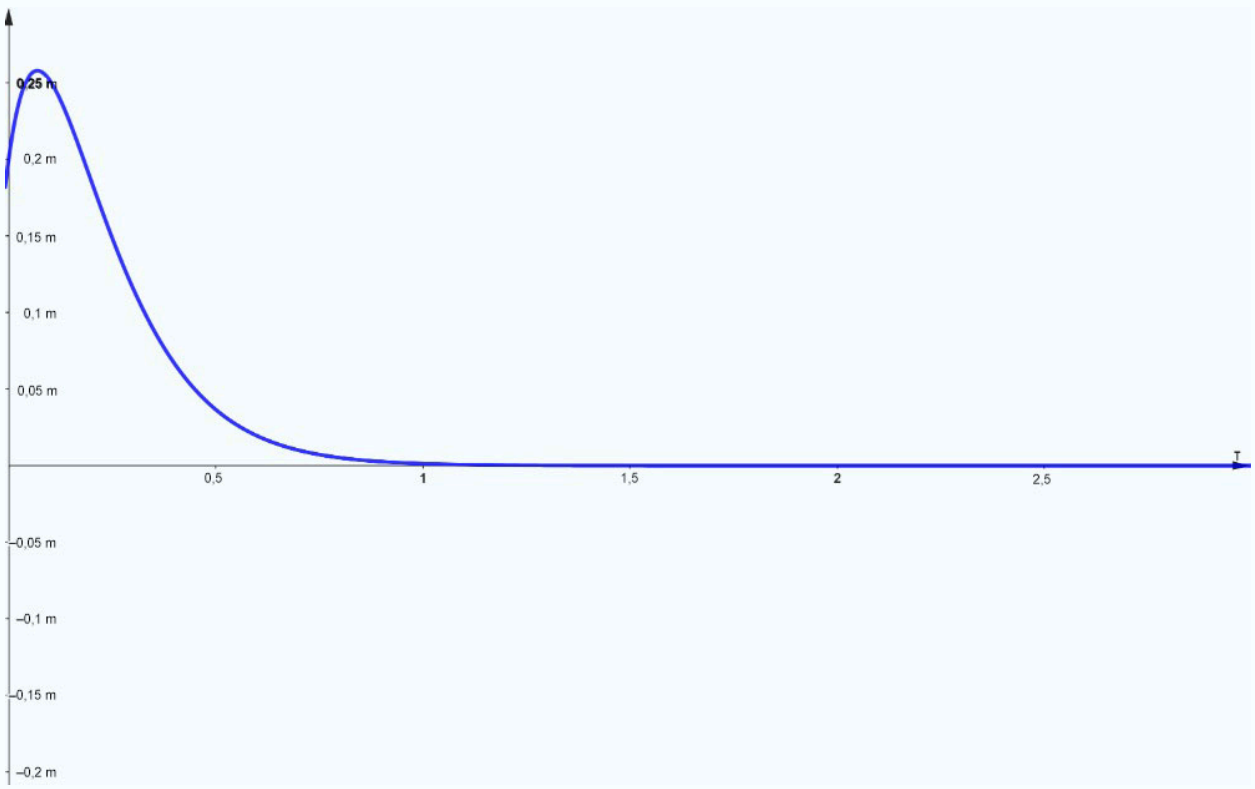
$$y_0(0) = 0{,}2$$

$$c_1e^0 + 0 = 0{,}2$$
$$c_1 = 0.2$$
$$y'(t) = -8c_1e^{-8t} + c_2e^{-8t}(1 - 8t)$$
$$y'_0(0) = 2$$
$$-8c_1e^0 + c_2e^0(1) = 2$$
$$-8(0{,}2) + c_2 = 2$$
$$c_2 = 3{,}6$$

L'équation du déplacement de l'objet est donc

$$y(t) = 0{,}2e^{-8t} + 3{,}6te^{-8t}$$

Le graphique du déplacement est montré au cours des trois premières secondes. Comme prévu, le système se déplace sans heurts et revient rapidement à sa position d'équilibre sans oscillation.



Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=182

Exemple 3.8.3 : Mouvement suramorti

Trouver le déplacement de l'objet dans l'exemple 3.8.2, avec un ressort maintenant attaché à un amortisseur avec une constante d'amortissement de 34 N.s/m.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Masse de l'objet : $m = 1 \text{ kg}$
- Constante d'amortissement : $c = 34 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$
- Constante du ressort : $k = 64 \text{ N}/\text{m}$
- Déplacement initial (ascendant) : $y_0(0) = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}$
- Vitesse initiale (ascendante) : $y'_0(0) = 2 \text{ m}/\text{s}$

Le problème de valeur initiale pour ce système est

$$y'' + 34y' + 64y = 0, \quad y_0(0) = 0{,}2, \quad y'_0(0) = 2$$

Dans l'exemple précédent, on a trouvé un coefficient d'amortissement critique de $c_{cr} = 16$. Dans ce nouveau système, le coefficient d'amortissement est supérieur à sa valeur critique ($c > c_{cr} = 16$ c_(cr)=16″ title= »c>c_(cr)=16″ class= »asciimath mathjax »>), de sorte que le système est suramorti.

Trouver la solution générale :

L'équation caractéristique pour cette équation différentielle a deux racines réelles distinctes.

$$r_{1,2} = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 - 4(1)(64)}}{2(1)}$$

$$r_1 = -2, \; r_2 = -32$$

La solution générale d'un système suramorti est donnée par l'équation 3.8.7.

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-32t}$$

Appliquer les conditions initiales :

$$y_0(0) = 0{,}2$$

$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0.2$$

$$c_1 + c_2 = 0{,}2$$

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 32c_2 e^{-32t}$$

$$y'_0(0) = 2$$

$$-2c_1 e^0 - 32c_2 e^0 = 2$$

$$-2c_1 - 32c_2 = 2$$

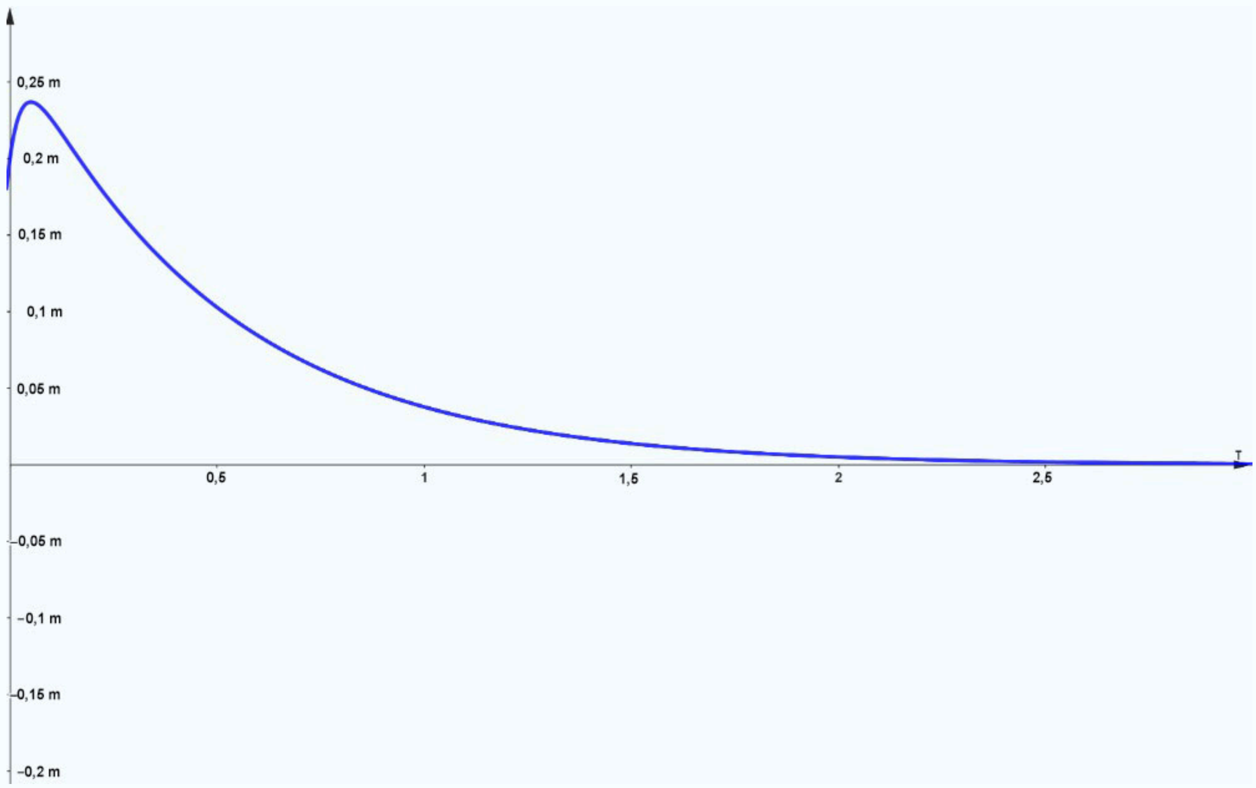
En résolvant le système pour les constantes c_1 et c_2, on obtient

$$c_1 = 0{,}28, \; c_2 = -0{,}08$$

L'équation du déplacement de l'objet est donc

$$y(t) = 0{,}28e^{-2t} - 0{,}08e^{-32t}$$

Le graphique ci-dessous montre le déplacement au cours des trois premières secondes. Il confirme que le système revient progressivement à sa position d'équilibre, en douceur et sans oscillation. Comparé au système à amortissement critique de l'exemple 3.8.2, ce système suramorti prend plus de temps à se stabiliser. Ce comportement plus lent souligne que l'augmentation de la force d'amortissement dans le système suramorti retarde le retour à l'équilibre.



Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=182

Exemple 3.8.4 : Mouvement sous-amorti

Trouver le déplacement de l'objet dans l'exemple 3.8.2, avec un ressort maintenant attaché à un amortisseur avec une constante d'amortissement de 4 N.s/m.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Masse de l'objet : $m = 1\ \mathrm{kg}$
- Constante d'amortissement : $c = 4\ \mathrm{N \cdot s/m}$
- Constante du ressort : $k = 64\ \mathrm{N/m}$
- Déplacement initial (ascendant) : $y_0(0) = 20\ \mathrm{cm} = 0{,}2\ \mathrm{m}$
- Vitesse initiale (ascendante) : $y'_0(0) = 2\ \mathrm{m/s}$

Le problème de valeur initiale pour ce système est

$$y'' + 4y' + 64y = 0,\ \ y_0(0) = 0{,}2,\ \ y'_0(0) = 2$$

Dans l'exemple 3.8.2, on a trouvé un coefficient d'amortissement critique de $c_{cr} = 16$. Dans ce nouveau système, le coefficient d'amortissement est inférieur à sa valeur critique ($c < c_{cr} = 16$), de sorte que le système est sous-amorti.

Trouver la solution générale :

L'équation caractéristique pour cette équation différentielle a deux racines complexes conjuguées.

$$r_{1,2} = -\frac{4}{2(1)} \pm \frac{\sqrt{4(1)(64) - 4^2}}{2(1)} i = -2 \pm 2\sqrt{15} i$$

La solution générale d'un système sous-amorti est donnée par l'équation 3.8.8.

$$y(t) = e^{-2t}\left(c_1 \cos\left(2\sqrt{15}t\right) + c_2 \sin\left(2\sqrt{15}t\right)\right)$$

Appliquer les conditions initiales :

$$y_0(0) = 0{,}2$$

$$e^0\left(c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)\right) = 0.2$$

$$c_1 = 0.2$$

$$y'(t) = e^{-2t}\left(-2c_1 \cos\left(2\sqrt{15}t\right) - 2c_2 \sin\left(2\sqrt{15}t\right) - \right.$$
$$\left. 2\sqrt{15}c_1 \sin\left(2\sqrt{15}t\right) + 2\sqrt{15}c_2 \cos\left(2\sqrt{15}t\right)\right)$$

$$y'_0(0) = 2$$

$$-2c_1 + 2\sqrt{15}c_2 = 2$$

$$-2(0{,}2)+2\sqrt{15}c_2=2$$
$$c_2=\frac{2\sqrt{15}}{25}$$

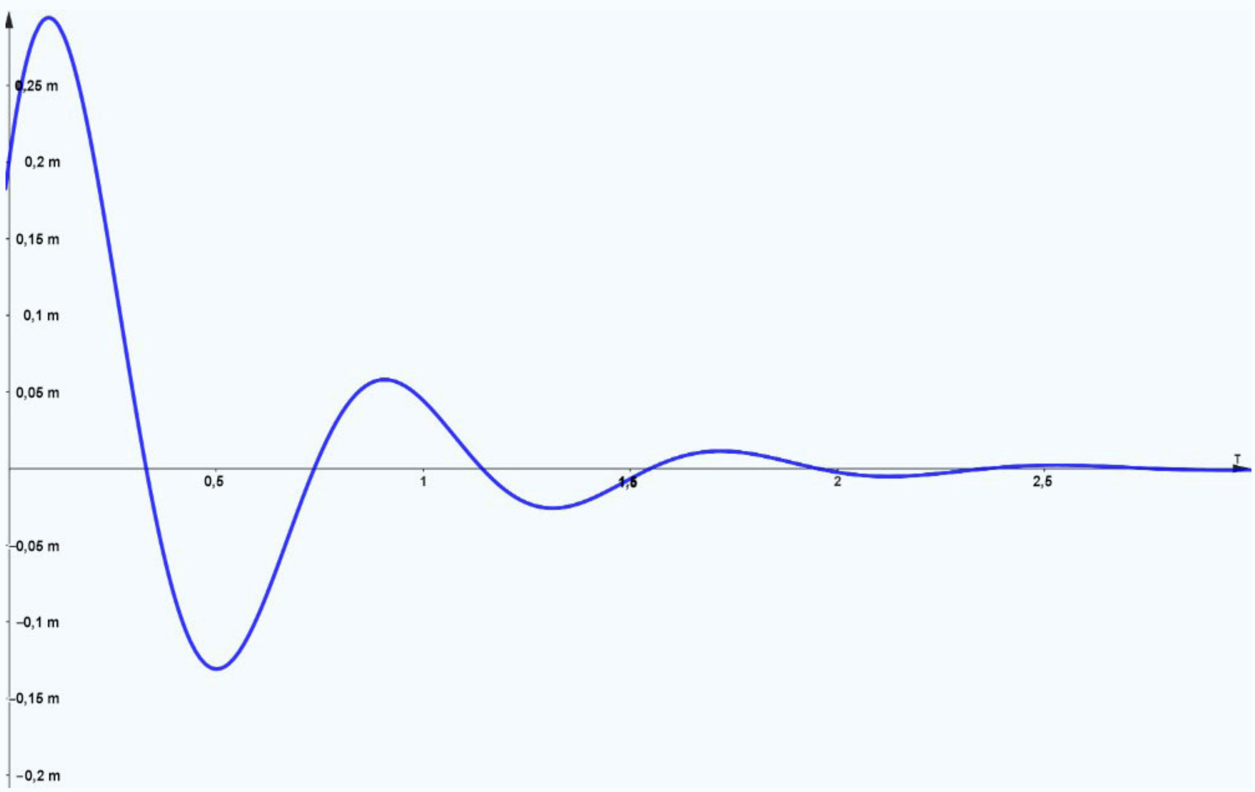
L'équation du déplacement de l'objet est donc

$$y(t)=e^{-2t}\left(0.2\cos(2\sqrt{15}t)+\frac{2\sqrt{15}}{25}\sin(2\sqrt{15}t)\right)$$

La forme amplitude-phase de l'équation est

$$y(t)=\frac{\sqrt{85}}{25}e^{-2t}\cos(2\sqrt{15}t-0{,}9976)$$

Le graphique illustre le déplacement du système sur les trois premières secondes. Ce système sous-amorti n'est pas assez amorti pour stopper les oscillations, d'où un schéma d'oscillations décroissantes autour de la position d'équilibre. Ces oscillations diminuent en amplitude pendant environ deux secondes avant que le système ne se stabilise à la position d'équilibre.



Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=182

F. Vibration forcée non amortie

Un système subit une vibration forcée non amortie lorsqu'il est soumis à une force externe, typiquement modélisée comme une fonction périodique telle que $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ou $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$. Ces forces sinusoïdales proviennent généralement de mécanismes de rotation, de courants alternatifs ou d'autres phénomènes cycliques. L'équation du mouvement d'un tel système s'exprime comme suit

$$my'' + ky = F_0 \cos(\omega t)$$

La solution générale de l'équation différentielle est

$$y(t) = y_p(t) + y_c(t)$$

Ici, la solution comprend une partie complémentaire $y_c(t)$, qui représente la réponse vibratoire libre et non amortie, et une partie particulière $y_p(t)$, qui représente la réponse du régime permanent à la fonction de forçage. La solution complémentaire, dictée par la fréquence naturelle du système $\omega_0 = \frac{k}{m}$, est donnée par l'équation 3.8.3 :

$$y_c(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

Pour déterminer la solution particulière, il faut normalement employer des méthodes telles que les coefficients indéterminés ou la variation des paramètres. Étant donné que l'on recherche la solution particulière, en fonction de la fréquence d'excitation oméga, on considère deux cas :

1. Sans résonance ($\omega \neq \omega_0$) : lorsque la fréquence d'excitation est différente de la fréquence naturelle, la solution particulière prend la forme

$$Y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Pour trouver les valeurs spécifiques des coefficients A et B, on utilise la méthode des coefficients indéterminés. Une fois ces coefficients déterminés, la solution particulière peut être exprimée sous la forme

$$y_p = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\cos(\omega t),$$

et la solution générale est

$$y(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\cos(\omega t) + c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) \tag{3.8.10}$$

La fonction de déplacement est constituée de composantes sinusoïdales et cosinusoïdales d'amplitude limitée.

2. Avec résonance ($\omega = \omega_0$) : lorsque la fréquence d'excitation est égale à la fréquence naturelle, la solution particulière prend la forme

$$Y_p(t) = t(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

En utilisant la méthode des coefficients indéterminés et après avoir déterminé les coefficients, la solution particulière peut être exprimée sous la forme

$$y_p = \frac{F_0}{2\,m\omega_0}t\sin(\omega_0 t)$$

La solution générale est donc

$$y(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin(\omega_0 t) + c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) \tag{3.8.11}$$

En ce cas, la solution particulière comporte un facteur temporel t, indiquant la hausse illimitée de l'amplitude. Ce phénomène, connu sous le nom de résonance, augmente considérablement l'amplitude des oscillations et présente des risques potentiels, notamment de défaillance mécanique due à des oscillations excessives.

L'amplitude des oscillations dans une vibration forcée est sensible à la relation entre la fréquence d'excitation et la fréquence naturelle du système. Lorsque la fréquence d'excitation se rapproche de la fréquence naturelle, l'amplitude augmente et atteint son pic au moment de la résonance. Cette sensibilité est un facteur clé dans la conception des structures et des systèmes, le but étant d'éviter que leurs fréquences naturelles soient alignées sur les fréquences des forces environnementales courantes, comme le vent ou la circulation. Un tel alignement pourrait déclencher une résonance, mettant en péril l'intégrité de la structure.

Cela étant, il existe des applications spécifiques qui tirent avantage de l'induction de la résonance, par exemple dans les filtres et les capteurs mécaniques, où la résonance peut améliorer la sensibilité ou l'intensité du signal.

Exemple 3.8.5 : Vibration forcée non amortie

Un objet de 32 livres (lb) est suspendu à un ressort, qu'il faut étirer de 6 pouces (inches) pour atteindre l'équilibre. Ce système non amorti est soumis à une force externe $F(t) = 2\cos(8t)$ et subit une résonance. Au départ, l'objet est déplacé de 3 pouces au-dessous de la position d'équilibre et reçoit une vitesse ascendante de 1 pied par seconde (ft/s). Déterminer le déplacement de l'objet dans ces conditions.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Masse de l'objet : $W = 32$ livres
- Déplacement du ressort à l'équilibre : $l = 6 \text{ in} = \frac{1}{2}$ pied
- Force externe : $F(t) = 2\cos(8t)$
- Déplacement initial (descendant) : $y_0(0) = -3 \text{ in} = -0{,}25$ pied
- Vitesse initiale (ascendante) : $y'_0(0) = 1$ pied/s

Calculer la constante du ressort

Dans le système britannique, le poids est généralement exprimé en livres (pounds). Pour trouver la constante du ressort, il faut d'abord convertir le poids en masse au moyen de la formule

$$W = mg$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{32}{32} = 1 \text{ slug}$$

À l'équilibre, $F_g = F_s$. Cette relation permet de calculer la constante du ressort k.

$mg = k(l) \rightarrow k = \frac{mg}{l}$ \ k=(mg)/(l) » title= »mg=k(l) ->\ k=(mg)/(l) » class= »asciimath mathjax »>

$$k = 64 \text{ livre-force/pied}$$

Calculer la fréquence naturelle :

La fréquence naturelle est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{64} = 8$$

Par ailleurs, si le système résonne à une fréquence d'excitation de $\omega = 8$ (à partir de $F(t) = 2\cos(8t)$), cette fréquence de résonance devrait correspondre à la fréquence naturelle du système, réaffirmant que $\omega_0 = 8$.

Trouver la solution générale :

Le problème de valeur initiale pour ce système est

$$y'' + 64y = 2\cos(8t),\ \ y_0(0) = -0{,}25,\ \ y'_0(0) = 1$$

La solution générale d'un système subissant une résonance est donnée par l'équation 3.8.11.

$$y(t) = \frac{2}{2(1)(8)} t\sin(8t) + c_1\cos(8t) + c_2\sin(8t)$$

$$y(t) = \frac{1}{8} t\sin(8t) + c_1\cos(8t) + c_2\sin(8t)$$

Appliquer les conditions initiales :

$y_0(0) = -0{,}25 \ \rightarrow$ » title= »y_0(0)=-0,25 \ -> » class= »asciimath mathjax »>

$$c_1 = -0{,}25 = -\frac{1}{4}$$

$y'_0(0) = 1 \ \rightarrow$ » title= »y'_0(0)=1\ -> » class= »asciimath mathjax »> $c_2 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$

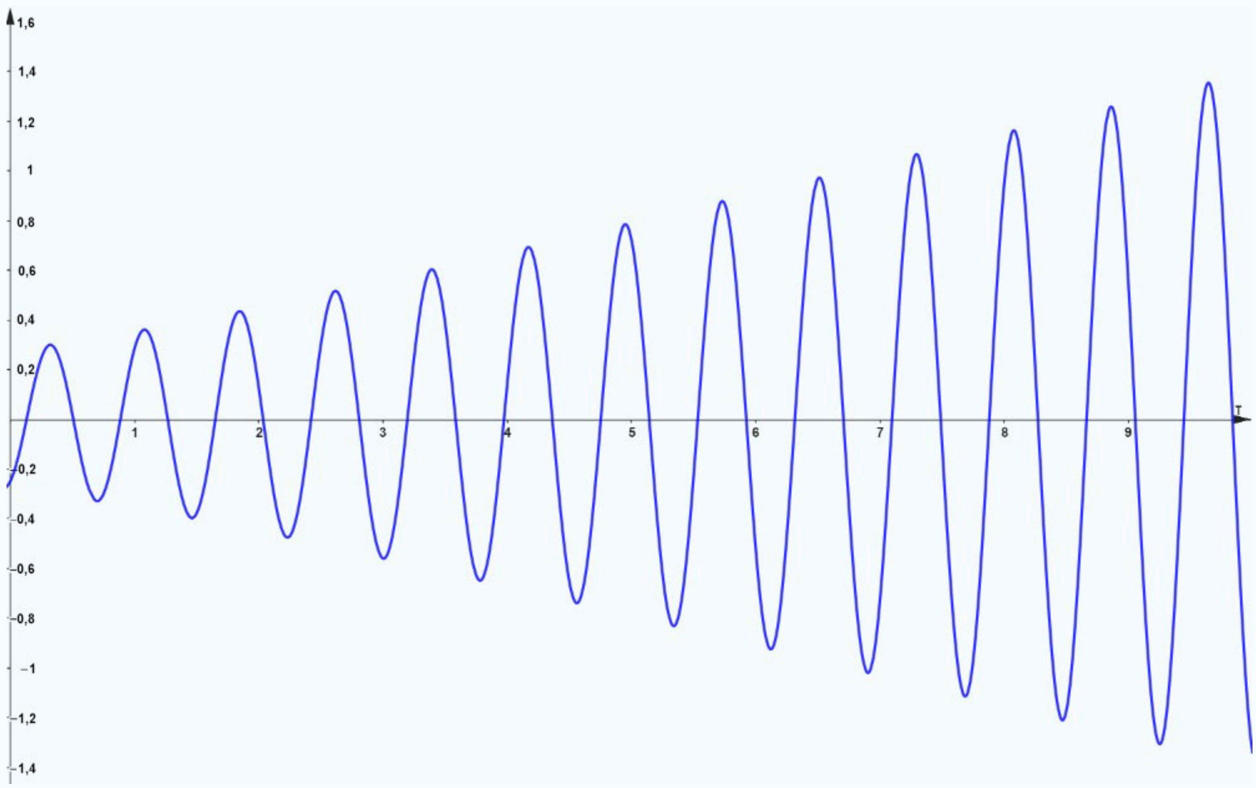
L'équation du déplacement de l'objet est donc

$$y(t) = \frac{1}{8} t\sin(8t) - \frac{1}{4}\cos(8t) + \frac{1}{8}\sin(8t)$$

La solution complémentaire peut être écrite sous la forme amplitude-phase, en combinant les deux derniers termes.

$$y(t) = \frac{1}{8} t\sin(8t) + \frac{\sqrt{5}}{8}\cos(8t - 2{,}6779)$$

Le graphique montre l'évolution du déplacement du système au cours des dix premières secondes. Comme la solution particulière inclut un facteur temps (t), l'amplitude du déplacement tend à devenir infiniment grande au fur et à mesure que le temps progresse vers l'infini. Cependant, dans la réalité, la plupart des systèmes subissent un certain amortissement. Même une petite dose d'amortissement peut avoir une incidence significative sur l'amplitude et le comportement du système, en particulier autour des fréquences de résonance, empêchant la croissance illimitée de l'amplitude dépeinte dans les modèles idéaux.



Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=182

G. Vibration forcée amortie

C'est le cas le plus général, qui combine les effets de l'amortissement et de la force externe. Le mouvement d'un tel système est régi par

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos(\omega t)$$

La solution de l'équation différentielle est la somme des solutions complémentaire et particulière.

$$y(t) = y_p(t) + y_c(t)$$

La solution complémentaire est la solution du comportement libre et amorti, tandis que la solution particulière est trouvée en utilisant la méthode des coefficients indéterminés ou de la variation des paramètres.

Compte tenu de notre connaissance des vibrations libres amorties, nous savons que, à mesure que le temps progresse vers l'infini, la solution complémentaire se rapproche de zéro. Par conséquent, le déplacement du système reflète de plus en plus le comportement de la solution particulière. Par conséquent, dans l'analyse vibratoire, la solution complémentaire est communément appelée **régime transitoire**, reflétant la réponse initiale, tandis que la solution particulière est connue sous le nom de **régime permanent**, illustrant la réponse continue à la force externe.

Exemple 3.8.6 : Vibration forcée amortie

Trouver le déplacement de l'objet dans l'exemple 3.8.5, avec un ressort maintenant attaché à un amortisseur avec une constante d'amortissement de 34 lb/.s/ft

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Masse de l'objet : $W = 32$ livres
- Déplacement du ressort à l'équilibre : $l = 6 \text{ in} = \frac{1}{2}$ pied
- Constante d'amortissement : $c = 20$ livre-force,s/pied
- Force externe : $F(t) = 2\cos(8t)$
- Déplacement initial (descendant) : $y_0(0) = -3 \text{ in} = -0{,}25$ pied
- Vitesse initiale (ascendante) : $y'_0(0) = 1$ pied/s

Dans l'exemple précédent, on a déterminé la constante du ressort : $k = 64$ livre-force/pied . Le problème de valeur initiale pour ce système est

$$y'' + 20y' + 64y = 2\cos(8t),\ \ y_0(0) = -0{,}25,\ \ y'_0(0) = 1$$

Étant donné que l'équation a deux racines réelles distinctes $r_1 = -4$ et $r_2 = -16$, la solution complémentaire, d'après l'équation 3.8.7, est

$$y_c(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}$$

Trouver la solution particulière :

Pour trouver la solution particulière, il faut utiliser la méthode des coefficients indéterminés. Compte tenu de la fonction cosinus de forçage, on suppose que la forme de la solution particulière est

$$Y_p = A\cos(8t) + B\sin(8t)$$

Les dérivées sont

$$Y'_p = -8A\sin(8t) + 8B\cos(8t)$$
$$Y''_p = -64A\cos(8t) - 64B\sin(8t)$$

En remplaçant Y_p et ses dérivées dans l'équation différentielle, on obtient

$$-64A\cos(8t) - 64B\sin(8t) + 20(-8A\sin(8t) + 8B\cos(8t))$$
$$+64(A\cos(8t) + B\sin(8t)) = 2\cos(8t)$$

En simplifiant, on obtient

$$160B\cos(8t) - 160A\sin(8t) = 2\cos(8t)$$

En faisant correspondre les coefficients des termes sinus et cosinus, on obtient

$160B = 2 \ \rightarrow \ B = \dfrac{1}{80}$ \ B=1/80″ title= »160B=2\ ->\ B=1/80″ class= »asciimath mathjax »>

$-160A = 0 \ \rightarrow \ A = 0$\ A=0″ title= »-160A=0\ ->\ A=0″ class= »asciimath mathjax »>

La solution particulière est donc

$$y_p = \frac{1}{80}\sin(8t)$$

En combinant les solutions particulière et complémentaire, on obtient la solution générale

$$y(t) = \frac{1}{80}\sin(8t) + c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}$$

Appliquer les conditions initiales :

$y_0(0) = -0{,}25 \ \rightarrow$ » title= »y_0(0)=-0,25 \ -> » class= »asciimath mathjax »>

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{4}$$

$y'_0(0) = 1 \ \rightarrow$ » title= »y'_0(0)=1\ -> » class= »asciimath mathjax »>

$$-4c_1 - 16c_2 = \frac{9}{10}$$

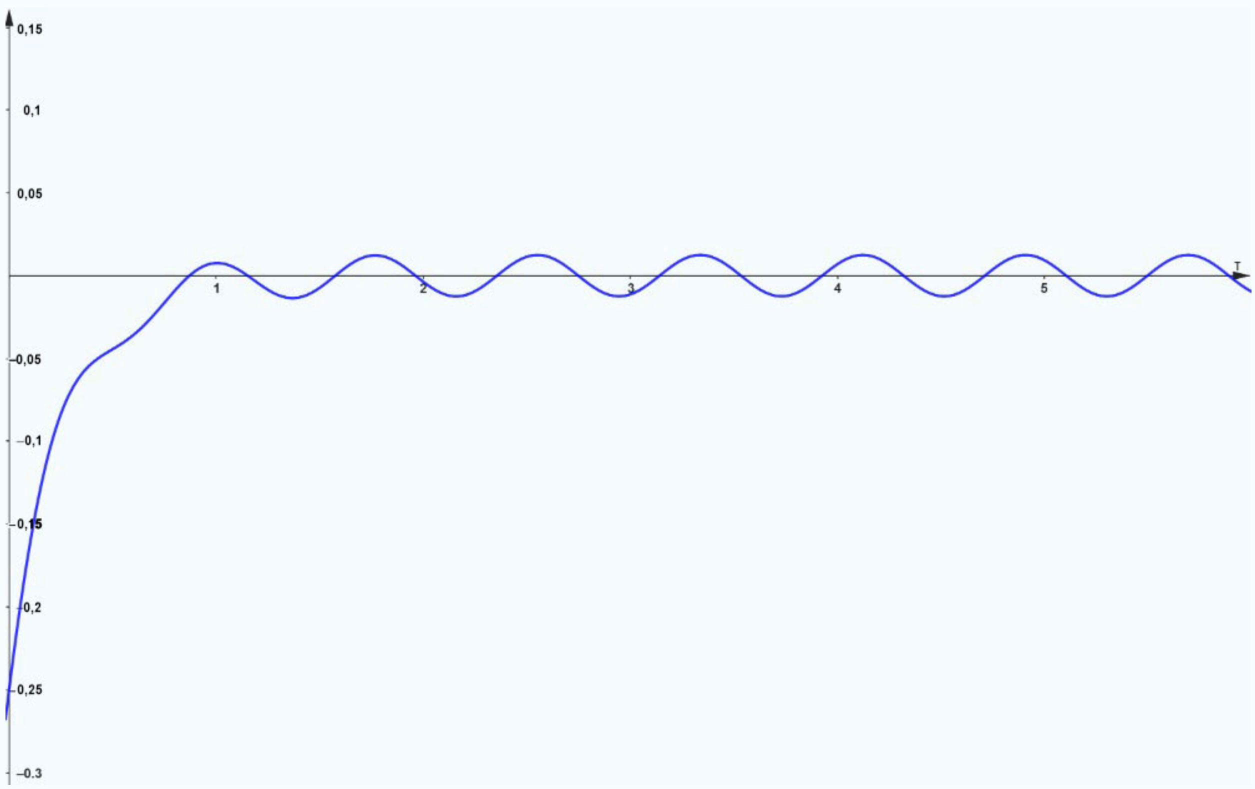
En résolvant le système, on obtient les constantes

$$c_1 = -\frac{31}{120},\ c_2 = \frac{1}{120}$$

L'équation du déplacement de l'objet est donc

$$y(t) = \frac{1}{80}\sin(8t) - \frac{31}{120}e^{-4t} + \frac{1}{120}e^{-16t}$$

Le graphique représente l'évolution du déplacement du système au cours des six premières secondes. Initialement, pendant la première seconde environ, le déplacement est principalement influencé par la solution complémentaire, ce qui reflète la phase transitoire. Après cette période initiale, le déplacement s'aligne de plus en plus sur la solution périodique particulière, représentant le comportement du système en régime permanent.



Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=182

Section 3.8 Exercices

1. Un objet attaché à un ressort subit un mouvement harmonique simple modélisé par l'équation différentielle

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

où $y(t)$ est le déplacement de la masse (par rapport à l'équilibre) à l'instant t, m est la masse de l'objet et k est la constante du ressort. Une masse de $15\ \mathrm{kg}$étire le ressort de $0{,}25\ \mathrm{m}$. **a)** Utilise cette information pour trouver la constante du ressort. (Utilise $g = 9{,}8\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$). **b)** La masse est détachée du ressort et une nouvelle masse de $2\ \mathrm{kg}$ est attachée. Cette masse est déplacée de $0{,}1\ \mathrm{m}$ au-dessus du point d'équilibre (le dessus est positif et le dessous est négatif), puis lancée à une vitesse initiale de $2\ \mathrm{m}/\mathrm{s}$. Rédige l'équation du mouvement sous la forme $y(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$. Ne laisse aucune constante inconnue dans votre équation.

Afficher/Masquer la réponse

a) $k = 588$ N/m
b) $y(t) = \dfrac{1}{10}\cos(7\sqrt{6}t) + \dfrac{2}{7\sqrt{6}}\sin(7\sqrt{6}t)$

2. Un objet de $13\ \mathrm{kg}$ est attaché à un ressort avec une constante du ressort de $9\ \mathrm{kg}/\mathrm{s}^2$. Il est également attaché à un amortisseur à constante d'amortissement de $9\ \mathrm{kg}/\mathrm{s}$. L'objet est initialement déplacé de $5\ m$ au-dessus du point d'équilibre, puis relâché. **a)** Trouve son déplacement pour$t > 0$ 0″ title= »t > 0″ class= »asciimath mathjax »>. **b)** Décris le mouvement.

Afficher/Masquer la réponse

a) $y(t) = e^{-\frac{9}{26}t}\left(5\cos\left(\frac{\sqrt{387}}{26}t\right) + \frac{45}{\sqrt{387}}\sin\left(\frac{\sqrt{387}}{26}t\right)\right)$

b) Vibration libre non amortie

3. Un objet de $16\ \mathrm{kg}$ est attaché à un ressort avec une constante du ressort de $64\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{s}^2$. Il est également attaché à un amortisseur à constante d'amortissement de $c = 64\,\mathrm{kg/s}$. L'objet est tiré de $0.1\ m$ vers le bas, puis relâché à une vitesse ascendante initiale de $4\ \mathrm{m/s}$. Trouve le déplacement de l'objet. Pars du principe que le déplacement et la vitesse sont positifs et ascendants.

Afficher/Masquer la réponse

$y(t) = -0{,}1e^{-2t} + 3{,}8te^{-2t}$

3.9 APPLICATION : CIRCUITS ÉLECTRIQUES RLC

Dans cette section 2.5F, nous avons exploré les équations différentielles du premier ordre pour des circuits électriques constitués d'une source de tension dotée soit d'une résistance et d'un inducteur (RL), soit d'une résistance et d'un condensateur (RC). Maintenant que nous savons résoudre les équations différentielles du second ordre, nous sommes prêts à nous lancer dans l'analyse de circuits RLC plus complexes, composés d'une résistance, d'un inducteur et un condensateur.

Jusqu'à présent, nous avons vu que :

- La loi d'Ohm stipule que la baisse de tension E_R aux bornes d'une résistance est proportionnelle au courant I circulant entre ces bornes, ce qui s'exprime par $E_R = RI$, où R est la résistance.
- La loi de Faraday, complétée par la loi de Lenz, stipule que la baisse de tension E_L aux bornes d'un inducteur est proportionnelle au taux de variation du courant, ce qui s'exprime par $E_L = L\frac{dI}{dt}$, où L est l'inductance.
- La baisse de tension E_C aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la charge électrique q qui y est stockée, représentée par $E_C = \frac{1}{C}q$, où C est le condensateur.

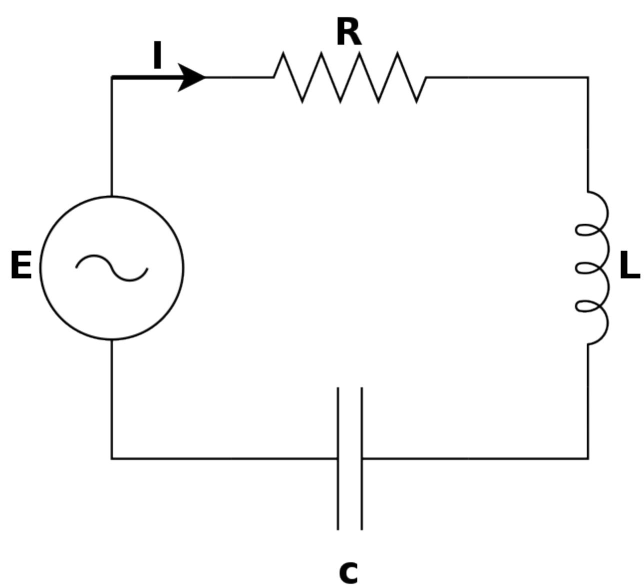


Figure 3.9.1 Schéma de circuit série RLC

Sur ces bases, considérons que $E(t)$ est la tension externe fournie au circuit série RLC représenté à la figure 3.9.1. En appliquant la loi des mailles de Kirchhoff, nous avons

$$E_L + E_R + E_c = E(t)$$

En remplaçant $E_R = RI$, $E_L = L\frac{dI}{dt}$ et $E_C = \frac{1}{C}q$ dans cette équation, on obtient

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{3.9.1}$$

En différenciant cette équation en fonction du temps et en remplaçant $I = \dfrac{dq}{dt}$, on la transforme en équation différentielle du seconde ordre.

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \tag{3.9.2}$$

De même l'équation 3.9.1 peut être exprimée en termes de charge $q(t)$.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{3.9.3}$$

Étant donné $E(t)$ et une condition initiale, telle qu'un courant initial $I(0)$ et une charge initiale $q(0)$, on peut résoudre l'équation pour $I(t)$ à l'aide des techniques abordées aux sections précédentes, par exemple la méthode des coefficients indéterminés. Une fois que $I(t)$ est déterminé, la tension aux bornes des différents composants du circuit peut être calculée.

Exemple 3.9.1 : Circuit série RL

Prenons un circuit série RLC avec une résistance de $0{,}06\ \Omega$ et un inducteur de $0{,}01\ \mathrm{H}$, ainsi qu'un condensateur de $\dfrac{50}{89}\ \mathrm{F}$ alimenté par une source de tension $E(t) = 0{,}1\sin(10t)\ \mathrm{V}$. Au départ, le courant et la charge sur le condensateur sont nuls. Déterminer le courant dans le circuit en fonction du temps.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Résistance : $R = 0{,}06\ \Omega$
- Inducteur : $L = 0{,}01\ \mathrm{H}$
- Condensateur : $C = \dfrac{50}{89}\ \mathrm{F}$
- Source de tension : $E(t) = 0{,}1\sin(10t)\ \mathrm{V}$
- Courant initial du condensateur : $I(0) = 0\ \mathrm{A}$
- Charge initiale du condensateur : $q(0) = I'(0) = 0\ C$

L'équation différentielle pour un circuit série RLC est donnée par l'équation 3.9.1.

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt}$$

Le problème de valeur initiale est donc

$$0{,}01\frac{d^2I}{dt^2}+0{,}06\frac{dI}{dt}+\frac{89}{50}I=\cos(10t),\quad I(0)=0,\ I'(0)=0$$

En multipliant l'équation par 100, on obtient

$$\frac{d^2I}{dt^2}+6\frac{dI}{dt}+178I=100\cos(10t),\quad I(0)=0,\ I'(0)=0$$

Étant donné que l'équation caractéristique a des racines complexes conjuguées $r_{1,2}=-3\pm 13i$, la solution complémentaire est

$$I_c(t)=e^{-3t}(c_1\cos(13t)+c_2\sin(13t))$$

Trouver la solution particulière :

Pour trouver la solution particulière, il faut utiliser la méthode des coefficients indéterminés. Compte tenu de la fonction cosinus de forçage, on suppose que la forme de la solution particulière est

$$I_p=A\cos(10t)+B\sin(10t)$$

Les dérivées sont

$$I'_p=-10A\sin(10t)+10B\cos(10t)$$
$$I''_p=-100A\cos(10t)-100B\sin(10t)$$

En remplaçant I_p et ses dérivées dans l'équation différentielle, on obtient

$$-100A\cos(10t)-100B\sin(10t)+6(-10A\sin(10t)+10B\cos(10t))$$
$$+178(A\cos(10t)+B\sin(10t))=100\cos(10t)$$

En simplifiant, cela donne

$$(78A+60B)\cos(10t)+(-60A+78B)\sin(10t)=100\cos(10t)$$

En faisant correspondre les coefficients des termes sinus et cosinus et en résolvant le système de deux équations dans les inconnues A et B, on obtient

$$A=\frac{650}{807},\ B=\frac{500}{807}$$

La solution particulière est donc

$$I_p=\frac{650}{807}\cos(10t)+\frac{500}{807}\sin(10t)$$

En combinant les solutions particulière et complémentaire, on obtient la solution générale

$$I(t) = \frac{650}{807}\cos(10t) + \frac{500}{807}\sin(10t) + e^{-3t}(c_1\cos(13t) + c_2\sin(13t))$$

Appliquer les conditions initiales :

$I_0(0) = 0 \rightarrow$ » title= »I_0(0)=0 \ -> » class= »asciimath mathjax »> $c_1 = -\frac{650}{807}$

$I'_0(0) = 0 \rightarrow$ » title= »I'_0(0)=0\ -> » class= »asciimath mathjax »> $c_2 = -\frac{6\,950}{10\,491}$

L'équation du déplacement de l'objet est donc

$$I(t) = \frac{650}{807}\cos(10t) + \frac{500}{807}\sin(10t) + e^{-3t}\left(-\frac{650}{807}\cos(13t) - \frac{6\,950}{10\,491}\sin(13t)\right)$$

Comme dans les scénarios de vibrations mécaniques forcées, le courant dans un circuit RLC est composé de deux parties distinctes : le **courant transitoire**, représenté par la solution complémentaire qui diminue à zéro à mesure que le temps progresse vers l'infini, et le **courant en régime permanent**, décrit par la solution particulière, qui est sinusoïdal et persiste dans le temps.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=184

Section 3.9 Exercices

1. Considérons un circuit RLC équipé d'une résistance de $\frac{17}{50}\Omega$, d'un inducteur de $\frac{1}{100}H$ et d'un condensateur de $\frac{100}{93}F$ alimenté par la tension $E(t) = 0{,}06\sin(3t)V$. **a)** Rédige l'équation différentielle associée à ce circuit en termes de courant I . **b)** Si la charge initiale et le courant initial du condensateur sont tous les deux nuls, trouve le courant I et les tensions aux bornes de la résistance E_R en termes de

temps t.

Afficher/Masquer la réponse

a) $I'' + 34I' + 93I = 18\cos(3t)$
b) $I(t) = 0{,}0205e^{-31t} - 0{,}1071e^{-3t} + 0{,}1052\sin(3t) + 0{,}08660\cos(3t)$
c) $E_R(t) = 0{,}34(0{,}0205e^{-31t} - 0{,}1071e^{-3t} + 0{,}1052\sin(3t) + 0{,}08660\cos(3t))$

2. Considérons un circuit RLC équipé d'une résistance de $\dfrac{1}{50}\,\Omega$, d'un inducteur de $\dfrac{1}{100}\,H$ et d'un condensateur de $\dfrac{50}{61}\,F$ alimenté par la tension $E(t) = 0{,}09t^2\ V$. **a)** Rédige l'équation différentielle associée à ce circuit en termes de courant I. **b) Si** la charge initiale et le courant initial du condensateur sont tous deux nuls, trouve le courant I.

Afficher/Masquer la réponse

a) $I'' + 2I' + 122I = 18t$
b) $I(t) = e^{-t}\left(\dfrac{9}{3\,721}\cos(11t) - \dfrac{540}{40\,931}\sin(11t)\right) + \dfrac{9}{61}t - \dfrac{9}{3\,721}$

TRANSFORMÉE INVERSE DE LAPLACE

Ce chapitre est consacré à la transformée de Laplace, un opérateur intégral largement utilisé pour simplifier la résolution d'équations différentielles en les transformant en équations algébriques dans un domaine différent.

4.1 Définitions : cette section présente le concept et l'opérateur intégral de la transformée de Laplace.

4.2 Propriétés de la transformée de Laplace : cette section traite des grandes propriétés de la transformée de Laplace, essentielles pour une transformation et une manipulation efficaces des fonctions.

4.3 Transformée inverse de Laplace : cette section explique le processus de conversion des fonctions du domaine de Laplace vers le domaine d'origine, connu sous le nom de transformée inverse de Laplace.

4.4 Résolution de problèmes de valeur initiale : cette section démontre l'application de la transformée de la Place et de son inverse dans la résolution de problèmes de valeur initiale (PVI).

4.5 Transformée de Laplace de fonctions définies par morceaux : cette section explore l'application de la transformée de Laplace aux fonctions continues par morceaux, en utilisant des outils tels que la fonction de Heaviside (fonction échelon unité).

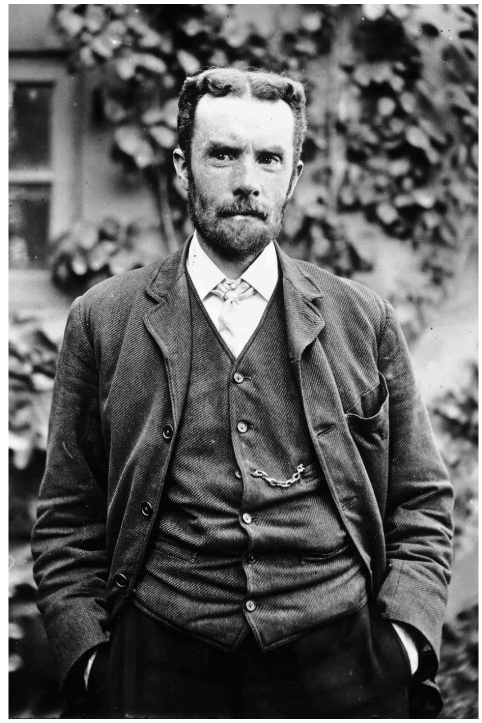
4.6 Résolution de problèmes de valeur initiale avec des fonctions de forçage définies par morceaux : cette section montre comment résoudre des PVI pour des équations différentielles du second ordre à coefficients constants et à fonctions de forçage continues par morceaux.

4.7 Fonction delta de Dirac (impulsion) : cette section présente la fonction delta de Dirac et son application à la résolution d'équations différentielles avec des fonctions de forçage impulsionnelles, qui sont caractérisées par des amplitudes élevées sur des intervalles très courts.

4.8 Table des transformées de Laplace : cette section présente un tableau résumant les transformées de Laplace et certaines de leurs propriétés pour une consultation rapide.

Pionniers du progrès

Oliver Heaviside, né en 1850 à Camden Town, à Londres, était un ingénieur en électricité, un mathématicien et un physicien autodidacte dont l'approche non conventionnelle du monde académique ne l'a pas empêché d'avoir un impact profond sur ce domaine. Largement autodidacte en raison de contraintes financières, Heaviside a poursuivi sa passion pour la théorie électromagnétique, apportant des contributions substantielles qui étaient à la fois novatrices et controversées en son temps. Sa réalisation la plus importante a été le développement du calcul opérationnel, un outil puissant dans l'application d'équations différentielles à des problèmes physiques, en particulier dans le domaine de l'ingénierie électrique. Les méthodes de Heaviside ont simplifié les équations complexes de l'électromagnétisme de Maxwell, les rendant plus accessibles et applicables dans la pratique, ce qui a eu un impact durable sur les télécommunications et sur l'ingénierie électrique. Malgré les critiques et la maigre reconnaissance dont il a fait l'objet de son vivant, le travail de Heaviside a été qualifié plus tard de révolutionnaire, influençant non seulement les fondements théoriques de l'ingénierie électrique, mais aussi les aspects pratiques de la transmission des signaux et de la conception des circuits. L'histoire d'Oliver Heaviside est une histoire de persévérance et d'intelligence, qui démontre qu'une quête incessante de connaissances peut conduire à des découvertes déterminantes pour le monde, hors de la voie académique conventionnelle.



Oliver Heaviside (1850-1925). Source : archive IET, domaine public, via Wikimedia Commons.

4.1 DÉFINITIONS

A. Introduction

Dans cette section, nous nous intéressons à un opérateur intégral connu sous le nom de transformée de Laplace. Ce puissant outil est employé pour convertir des problèmes de valeur initiale décrits par des équations différentielles dans un domaine (ex. : domaine *t*) en équations algébriques d'un autre domaine (domaine *s*). Il s'ensuit un processus de résolution plus efficace, en particulier pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants et à termes de forçage discontinus ou impulsifs. Par exemple, considérons un problème de valeur initiale dans le domaine temporel

Domaine-t : $y'(t) + 5y(t) = f(t), \quad y(0) = 10$

En appliquant la transformée de Laplace, l'équation différentielle est transformée en équation algébrique dans le domaine *s* :

***Domaine-s* :** $sY(s) - 10 + 5Y(s) = F(s)$

La représentation algébrique dans le domaine *s* est souvent plus simple à résoudre, sachant que la solution peut être retransformée dans le domaine *t* d'origine.

B. Définition

Disons que $f(t)$ est une fonction définie sur $[0, \infty)$ et que s est un nombre réel. La transformée de Laplace de f est la fonction F définie par l'intégrale

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{4.1.1}$$

La transformée de Laplace de f est dénotée à la fois par F et par $\mathscr{L}\{f\}$. Les fonctions peuvent également être exprimées par une paire transformée $f(t) \leftrightarrow F(s)$.

L'intégrale impropre dans la définition 4.1.1 est plus précisément définie comme suit :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt := \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

L'intégrale converge, c'est-à-dire qu'elle aboutit à un nombre fini lorsque cette limite existe et est finie.

Exemple 4.1.1 : Transformée de Laplace d'une fonction constante avec la définition

Trouver la transformée de Laplace de la fonction constante $f(t) = 2$.

Afficher/Masquer la solution

En remplaçant $f(t) = 1$ dans l'intégrale 4.1.1 de la définition de la transformée de Laplace, on obtient

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}(2)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}(2)dt$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{-2e^{-st}}{s}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{2}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}\right] = \begin{cases} \frac{2}{s} & \text{if} \quad s > 0 \\ \infty & \text{if} \quad s \leq 0 \end{cases}$$

On note que l'intégrale diverge pour <img src= »https://ecampusontario.pressbooks.pub/app/uploads/sites/4139/2024/03/bee52be777a1b0a7e6e707ffd0e43122.png » alt= »s<=0″ title= »s, de sorte que le domaine de $F(s)$ est $s > 0$. Comme $e^{-sT} \to 0$0″ title=$T \to \infty$pour un s fixe, on obtient alors

$$F(s) = \frac{2}{s} \text{ for } s > 0 \quad \text{ou} \quad 2 \leftrightarrow \frac{2}{s} \text{ comme paire transformée}$$

En général, la transformée de Laplace de la fonction constante $f(t) = C$ est $\mathscr{L}\{C\} = \frac{C}{s}$.

Exemple 4.1.2 : Transformée de Laplace d'une fonction exponentielle avec la définition

Trouver la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{at}$.

Afficher/Masquer la solution

En remplaçant $f(t) = e^{at}$ dans l'intégrale 4.1.1 de la définition de la transformée de Laplace, on obtient

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at}\right)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(s-a)t}dt$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{-e^{(s-a)t}}{s-a}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{e^{(s-a)T}}{s-a}\right] = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{si} \quad s > 0 \\ \infty & \text{si} \quad s \leq a \end{cases}$$

On note que l'intégrale diverge pour <img src= »https://ecampusontario.pressbooks.pub/app/uploads/sites/4139/2024/03/ab75a1d6eefe2e3eaa551ed88dced657.png » alt= »s<=a » title= »s, de sorte que le domaine de $F(s)$ est $s > a$. Par conséquent,

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \text{ for } s > a \quad \text{ou} \quad e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \text{ comme paire transformée}$$

En pratique, bien que la définition de la transformée de Laplace implique une intégrale, elle est rarement calculée directement par intégration en raison de la complexité et de la lenteur du processus. Au lieu de cela, nous utilisons généralement des tables précalculées de transformées de Laplace. Ces tables répertorient les fonctions courantes et leurs transformées correspondantes, ce qui permet une application rapide et précise de la transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles et analyser des systèmes. La table 4.1.1 recense la transformée de Laplace de certaines fonctions courantes. Une table plus complète figure à la section 4.8.

Table 4.1.1 : Table synthétique des transformées de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$	**Domaine de** $F(s)$
C	$\dfrac{C}{s}$	$s > 0$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n,\ n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at},\ n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin(bt)$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$	$s > 0$
$\cos(bt)$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$	$s > 0$
$e^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
$\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$	$s > b$
$\cosh(bt)$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$	$s > b$

Exemple 4.1.3 : Transformée de Laplace avec la table

Utiliser la table des transformées de Laplace pour déterminer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

a) $f(t) = \sin(2t)$
b) $g(t) = \cos(5t)$

Afficher/Masquer la solution

a) À partir de la table

$$\mathscr{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad \text{pour} \quad s > 0$$

Sachant que $b = 2$, la transformée est

$$\mathscr{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 2^2} \quad \text{pour} \quad s > 0$$

b) À partir de la table

$$\mathscr{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad \text{pour} \quad s > 0$$

Sachant que $b = 5$, la transformée est

$$\mathscr{L}\{\cos(5t)\} = \frac{s}{s^2 + 5^2} \quad \text{pour} \quad s > 0$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=210

Section 4.1 Exercices

1. Trouve la transformée de Laplace, $F(s)$, de la fonction $f(t) = e^{4t}, \quad t > 0$.

Afficher/Masquer la réponse

$$F(s) = \frac{1}{s-4}$$

2. Trouve la transformée de Laplace, $F(s)$, de la fonction $f(t) = \cos(4t), \quad t > 0$.

Afficher/Masquer la réponse

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4^2}$$

3. Trouve la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = 6\cosh(2t)\,,\ t > 0\,$.

Afficher/Masquer la réponse

$$F(s) = \frac{6s}{s^2 - 2^2}$$

4.2 PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Il est essentiel de comprendre les propriétés de la transformée de Laplace, car elle fournit des outils permettant de transformer et de manipuler efficacement les fonctions. Ces propriétés simplifient grandement l'analyse et la résolution des équations différentielles et des systèmes complexes.

A. Existence de la transformée

La transformée de Laplace existe pour toute fonction qui est (1) continue par morceaux et (2) d'ordre exponentiel (c'est-à-dire qui ne croît pas plus vite qu'une fonction exponentielle). Une fonction $f(t)$ est dite d'ordre exponentiel a s'il existe des constantes positives M et si t_0, de sorte que <img src= »https://ecampusontario.pressbooks.pub/app/uploads/sites/4139/2024/03/691166b3801d130b71532d250417670b.png » alt= »|f(t)|<=Me^(at), » title= »|f(t)| pour tous les $t \geq t_0$ =t_0″ title= »t>=t_0″ class= »asciimath mathjax »>. Par exemple, $f(t) = e^{7t}\cos(4t)$ est d'ordre exponentiel 7, mais $g(t) = e^{t^3}$ n'est pas d'ordre exponentiel.

B. Linéarité de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace obéit au principe de linéarité. Disons que f_1 et f_2 sont des fonctions pour lesquelles existe la transformée de Laplace $s > s_0$s_0″ title= »s>s_0″ class= »asciimath mathjax »> et que c_1 et c_2 sont des constantes. Alors, pour $s > s_0$s_0″ title= »s>s_0″ class= »asciimath mathjax »>, la transformée de Laplace d'une combinaison linéaire de ces fonctions est donnée par :

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\}$$

Cette propriété est utile avec les combinaisons linéaires de fonctions.

Exemple 4.2.1 : Trouver la transformée de Laplace avec le théorème de linéarité

Utiliser la table des transformées de Laplace et la propriété de linéarité pour déterminer

$$\mathscr{L}\left\{2e^{-3t} - 6\cos(4t) + 9t^2\right\}.$$

Afficher/Masquer la solution

1. À partir de la table

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s-(-3)} = \frac{1}{s+3} \quad \text{pour } s > -3$$ -3″ title= »s> -3″ class= »asciimath mathjax »>

$$\mathscr{L}\{\cos(4t)\} = \frac{s}{s^2+4^2} = \frac{s}{s^2+16} \quad \text{pour } s > 0$$ 0″ title= »s> 0″ class= »asciimath mathjax »>

$$\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3} \quad \text{pour } s > 0$$ 0″ title= »s> 0″ class= »asciimath mathjax »>

2. À partir du théorème de linéarité, on a

$$\mathscr{L}\{2e^{-3t} - 6\cos(4t) + 9t^2\} = 2\mathscr{L}\{e^{-3t}\} - 6\mathscr{L}\{\cos(4t)\} + 9\mathscr{L}\{t^2\}$$
$$= 2\left(\frac{1}{s+3}\right) - 6\left(\frac{s}{s^2+16}\right) + 9\left(\frac{2}{s^3}\right)$$
$$= \frac{2}{s+3} - \frac{6s}{s^2+16} + \frac{18}{s^3} \quad \text{pour } s > 0$$ 0″ title= »s>0″ class= »asciimath mathjax »>

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=215

C. Premier théorème du déplacement

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, alors

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$

Ce théorème est très utile pour résoudre des équations différentielles avec des termes exponentiels ou pour analyser des systèmes avec des entrées exponentielles.

Exemple 4.2.2 : Trouver la transformée de Laplace avec le premier théorème du déplacement de Laplace et le théorème de linéarité

Utiliser le premier théorème du déplacement et la propriété de linéarité pour déterminer

$$\mathscr{L}\left\{2e^{9t}\sin(7t)+8t^3e^{-6t}\right\}.$$

Afficher/Masquer la solution

Avec le premier théorème du déplacement, on a

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$$

1. Dans $\mathscr{L}\left\{e^{9t}\sin(7t)\right\}$, $f(t)=\sin(7t)$ et le coefficient dans l'exposant du terme exponentiel est $a=9$.

$F(s)=\mathscr{L}\{\sin(7t)\}=\dfrac{7}{s^2+7^2}$ pour $s>0$0″ title= »s>0″ class= »asciimath mathjax »>

En déplaçant $F(s)$, on remplace s par $s-9$.

$\mathscr{L}\left\{e^{9t}\sin(7t)\right\}=F(s-9)=\dfrac{7}{(s-9)^2+7^2}$ pour $s>9$9″ title= »s>9″ class= »asciimath mathjax »>

2. Dans $\mathscr{L}\left\{t^3e^{-6t})\right\}$, $f(t)=t^3$ et le coefficient dans l'exposant du terme exponentiel est $a=-6$.

$F(s)=\mathscr{L}\left\{t^3\right\}=\dfrac{3!}{s^{3+1}}=\dfrac{3!}{s^4}$ pour $s>0$0″ title= »s>0″ class= »asciimath mathjax »>

En déplaçant $F(s)$, on remplace s par $s-(-6)$.

$\mathscr{L}\left\{t^3e^{-6t})\right\}=F(s+6)=\dfrac{6}{(s+6)^4}$ pour $s>-6$ -6″ title= »s> -6″ class= »asciimath mathjax »>

3. À partir du théorème de linéarité, on a

$$\mathscr{L}\left\{2e^{9t}\sin(7t)+8t^3e^{-6t}\right\}=2\mathscr{L}\left\{e^{9t}\sin(7t)\right\}+8\mathscr{L}\left\{t^3e^{-6t}\right\}$$

$$= 2\left(\frac{7}{(s-9)^2+49}\right) + 8\left(\frac{6}{(s+6)^4}\right)$$

$$= \frac{14}{(s-9)^2+49} + \frac{48}{(s+6)^4}$$ pour $s > 9$9″ title= »s>9″ class= »asciimath mathjax »>

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=215

D. Différenciation dans le domaine temporel

Il faut absolument savoir transformer les dérivées pour résoudre efficacement des équations différentielles. Cette propriété permet d'exprimer la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction en termes de transformée de la fonction originale. Pour une fonction $f(t)$ avec des dérivées continues jusqu'au n^{th} ordre,

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Comme nous traiterons principalement d'équations différentielles du second ordre, nous nous concentrerons sur la transformée de Laplace des dérivées première et seconde.

Exemple 4.2.3 : Transformée de Laplace de dérivée première

Pour la fonction $f(t) = \sin(3t)$, montrer que $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$.

Afficher/Masquer la solution

Identifier la dérivée et la valeur initiale :

$f(t) = \sin(3t)$ $\rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $f'(t) = 3\cos(3t)$ et
$f(0) = \sin(0) = 0$

Trouver les transformées de Laplace :

À partir de la table des transformées de Laplace, on a

$$\mathscr{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+3^2}$$
$$\mathscr{L}\{\sin(3t)\} = \frac{3}{s^2+3^2}$$

Appliquer la propriété de différenciation :

Il faut montrer

$$\mathscr{L}\{3\cos(3t)\} = s\mathscr{L}\{\sin(3t)\} - \sin(0)$$

En introduisant les transformées et la valeur initiale, on obtient

$$3\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right) = s\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right) - 0$$

Et, en simplifiant les deux côtés, on a

$$\frac{3s}{s^2+3^2} = \frac{3s}{s^2+3^2}$$

Cette égalité confirme la propriété de différenciation, puisque les deux côtés sont identiques.

Exemple 4.2.4 : Transformée de Laplace de dérivée seconde

Trouver la transformée de Laplace de y'' étant donné les conditions initiales $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$. Utiliser Y pour $\mathscr{L}\{y\}$.

Afficher/Masquer la solution

À partir de la propriété de différenciation, on a

$$\mathscr{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y(0)$$

En insérant les conditions initiales $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$, on obtient

$$\mathscr{L}\{y''\} = s^2Y + 3s - 1$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=215

La table 4.2.1 résume les propriétés ci-dessus de la transformée de Laplace. Ces propriétés sont cruciales pour simplifier les calculs et utiliser efficacement la transformée de Laplace dans la résolution des problèmes de valeur initiale.

Table 4.2.1 : Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété	Exemple
$\mathscr{L}\{f+g\} = \mathscr{L}\{f\} + \mathscr{L}\{g\}$	$\mathscr{L}\{t+\cos(2t)\} = \mathscr{L}\{t\}+\mathscr{L}\{\cos(2t)\} = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{s}{s^2+2^2}$
$\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$ pour n'importe quelle constante c	$\mathscr{L}\{4t\} = 4\mathscr{L}\{t\} = 4\left(\dfrac{1}{s^2}\right)$
$\mathscr{L}\{e^{at}f\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s-a)$	$\mathscr{L}\{e^{3t}\sin(5t)\} = \dfrac{5}{(s-3)^2+5^2}$
$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0)$ $\mathscr{L}\{f''\} = s^2\mathscr{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$	
$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}(\mathscr{L}\{f\})$	$\mathscr{L}\{t^1\sin(7t)\} = (-1)^1\dfrac{d}{ds}(\mathscr{L}\{\sin(7t)\}) = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{7}{s^2+7^2}\right) = \dfrac{14s}{(s^2+49)^2}$

Section 4.2 Exercices

1. Trouve la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = -3t^5 + 9\sin(t),\ t > 0$.

   Afficher/Masquer la réponse

   $$F(s) = -\frac{360}{s^6} + \frac{9}{s^2+1},\ s > 0$$

2. Trouve la transformée de Laplace, $F(s)$, de la fonction

   $$f(t) = 10e^t\sin(t),\ t > 0.$$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$F(s) = \frac{10}{(s-1)^2+1},\ s > 1$$

3. Trouve la transformée de Laplace de y'' compte tenu des conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = -2$.

Afficher/Masquer la réponse

$$\mathscr{L}\{y''\} = s^2Y - 4s + 2$$

4.3 TRANSFORMÉE INVERSE DE LAPLACE

Dans les sections précédentes, nous avons défini la transformée de Laplace comme un opérateur intégral capable de représenter une fonction $f(t)$ et ses dérivées dans une équation différentielle en une équation algébrique en termes de s et de fonction $F(s)$. Pour résoudre des équations différentielles, il faut souvent obtenir $f(t)$ à partir de sa transformée $F(s)$ afin de résoudre le problème de valeur initiale d'origine. Ce processus est facilité par la transformée inverse de Laplace.

En règle générale, la formule d'inversion formelle n'est pas directement utilisée en raison de sa complexité. Au lieu de cela, on fait appel aux tables de transformées de Laplace pour trouver les transformées inverses de $F(s)$ obtenues à partir du problème d'origine. La transformée inverse de Laplace est représentée par

$$f = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$$

Linéarité de la transformée inverse de Laplace

Tout comme la transformée de Laplace, l'opération inverse est linéaire. Si F_1 et F_2 sont des fonctions dans le domaine s avec des constantes c_1 et c_2, de sorte que la transformée inverse de Laplace d'une combinaison linéaire de F_1 et F_2 pour $s > s_0$ est donnée par

$$\mathscr{L}^{-1}\{c_1F_1 + c_2F_2\} = c_1\mathscr{L}^{-1}\{F_1\} + c_2\mathscr{L}^{-1}\{F_2\}$$

Cette propriété garantit que le processus de recherche de la transformée inverse d'une expression compliquée peut souvent être décomposé en parties plus simples et plus faciles à gérer.

Exemple 4.3.1 : Déterminer la transformée inverse de Laplace

Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+7} + \frac{8s}{s^2+16}\right\}$.

Afficher/Masquer la solution

À partir de la table 4.1

$$e^{-7t} \leftrightarrow \frac{1}{s+7} \quad \text{et} \quad \cos(4t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+4^2}$$

À partir de la linéarité, on obtient donc

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+7} + \frac{8s}{s^2+16}\right\} = 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+7}\right\} + 8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}$$

À partir de la table des transformées de Laplace, on obtient

$$= 5e^{-7t} + 8\cos(4t)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=217

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=217

Dans le processus de recherche de la transformée de Laplace inverse, on rencontre souvent la fonction rationnelle $F(s)$ sous la forme

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Ici, $P(s)$ et $Q(s)$ sont des polynômes. Pour s'assurer que $F(s)$ représente une transformée de Laplace valide, on considère généralement des cas où le degré de $P(s)$ est inférieur à celui de $Q(s)$, car on peut montrer que $F(s)$ est une transformée de Laplace si $\lim_{s\to\infty} F = 0$. Cette condition est souvent appelée condition de régularité d'une fonction rationnelle dans le domaine de Laplace.

Dans ce cas, la recherche de l'inverse peut nécessiter de compléter le carré du dénominateur ou d'effectuer un développement partiel de la fraction, une technique similaire à celle utilisée dans le calcul intégral. Ces techniques sont particulièrement nécessaires lorsque l'on tente de faire correspondre $F(s)$ à une transformée inversée connue à partir de tables standard. Le choix entre la complétion du carré et la décomposition en fractions partielles dépend de la nature et de la composition du dénominateur $Q(s)$.

- La **décomposition en fractions partielles** constitue souvent la première approche considérée. Elle est efficace lorsque le dénominateur $Q(s)$ est factorisable en facteurs linéaires ou quadratiques irréductibles. Cette technique décompose les expressions rationnelles complexes en parties plus simples, ce qui facilite la recherche de la transformée inverse de Laplace pour chaque terme individuel.
- La **complétion du carré** est utilisée lorsque le dénominateur $Q(s)$ comporte des termes quadratiques qui ne se factorisent pas en termes linéaires réels, ce qui indique souvent des racines complexes.

Pour illustrer ces méthodes, voici quelques exemples montrant comment appliquer ces techniques pour trouver la transformée inverse de Laplace de diverses fonctions.

Exemple 4.3.2 : Complétion du carré

Trouver la transformée inverse de Laplace

$$\frac{3}{s^2+2s+17}$$

Afficher/Masquer la solution

Le dénominateur n'est pas factorisable. On doit donc essayer de compléter le carré :

$$s^2+2s+17 = s^2+2s+1+16 = (s+1)^2+16 = (s+1)^2+4^2$$

À partir de la table 4.1, on voit que

$$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \leftrightarrow e^{at}\sin(bt)$$

Ainsi, $a = -1$ et $b = 4$. Pour pouvoir utiliser la transformée inverse ci-dessus, il faut créer un 4 dans le numérateur. On multiplie donc le numérateur et le dénominateur de la fonction d'origine par 4. On obtient

$$\frac{3}{s^2+2s+17} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{(s+1)^2+4^2}\right)$$

On peut maintenant utiliser l'inverse de la table

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+2s+17}\right\} = \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+1)^2+4^2}\right\} = \frac{3}{4}\,e^{-t}\,\sin(4t)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=217

Exemple 4.3.3 : Décomposition en fractions partielles

Trouver la transformée inverse de Laplace

$$\frac{s^2-s-5}{(s-2)^2(s+1)}$$

Afficher/Masquer la solution

Dans le dénominateur, on a un facteur linéaire répété $s-2$ de multiplicité deux et un facteur linéaire non répété $s-1$. Cette composition nous conduit à structurer la décomposition en fractions partielles comme suit :

$$\frac{s^2-s-5}{(s-2)^2(s+1)} = \frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s+1}$$

Une façon de trouver les constantes A, B et C consiste à multiplier les deux côtés de l'égalité par $(s-2)^2(s+1)$ afin d'éliminer les dénominateurs :

$$s^2-s-5 = A(s-2)(s+1)+B(s+1)+C(s-2)^2$$

On peut alors trouver la valeur des constantes en mettant en équation les coefficients de termes similaires des deux côtés. Cela forme un système d'équations.

Une autre méthode, souvent plus simple, consiste à choisir stratégiquement des valeurs pour s qui simplifient l'équation et isolent chacune des constantes. Par exemple :

Pour B : soit $s=2$, ce qui annule les termes avec A et C et conduit à :

$$2^2-(2)-5 = A(2-2)(2+1)+B(2+1)+C(2-2)^2$$
$$-3=3B \rightarrow B=-1$$

Pour C : soit $s=-1$, ce qui simplifie l'équation pour trouver la valeur de C :

$$(-1)^2-(-1)-5 = A(-1-2)(-1+1)-(-1+1)+C(-1-2)^2$$
$$-3=9C \rightarrow C=-\frac{1}{3}$$

Pour A : choisir un s différent, par exemple $s=0$, pour isoler et trouver la valeur de A :

$$-5=A(-2)(1)-(1)-\frac{1}{3}(-2)^2 \rightarrow 2A=5-1-\frac{4}{3} \rightarrow 2A=\frac{8}{3}$$
$$A=\frac{4}{3}$$

Avec $A=\frac{4}{3}$, $B=-1$, et $C=-\frac{1}{3}$, la fraction partielle devient

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-s-5}{(s-2)^2(s+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right)-\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right\}$$

Avec la linéarité, la transformée inverse de Laplace est

$$=\frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

Et, en se référant à la table des transformées inversés, on a

$$\frac{1}{s-a} \leftrightarrow e^{at} \quad \text{et} \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \leftrightarrow t^n e^{at}$$

En appliquant cela avec $a = 2$ pour les deux premiers termes et $a = -1$ pour le dernier terme, on obtient

$$= \frac{4}{3}e^{2t} - te^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=217

Section 4.3 Exercices

1. Trouve la transformée inverse de Laplace de la fonction $F(s) = \dfrac{-s-6}{s^2+49},\ s > 0.$

   Afficher/Masquer la réponse

   $$f(t) = -\cos(7t) - \frac{6}{7}\sin(7t)$$

2. Trouve la transformée inverse de Laplace de $F(s) = \dfrac{-7s-2}{s^2+s-2}$.

   Afficher/Masquer la réponse

   $$f(t) = -4e^{-2t} - 3e^{t}$$

3. En résolvant une équation différentielle avec la transformée de Laplace, $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ est

$$Y(s) = \frac{16}{(s-7)^2 + 16} + \frac{-5s}{s^2+9} + \frac{8}{s^2+16}$$

Trouve la transformée inverse de Laplace de $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = 4e^{7t}\sin(4t) - 5\cos(3t) + 2\sin(4t)$$

4.4 RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE VALEUR INITIALE

Maintenant que nous avons vu la transformée de Laplace, son inverse et ses propriétés, nous sommes en mesure de résoudre des problèmes de valeur initiale (PVI) pour des équations différentielles linéaires. Nous nous concentrerons sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Méthode de transformée de Laplace pour des PVI

Approche générale :

1. Appliquer la transformée de Laplace pour chaque terme de l'équation différentielle. Utiliser les propriétés de la transformée de Laplace indiquées dans les tables 4.1 et 4.2 afin d'obtenir une équation en termes de $Y(s)$. Les transformées de Laplace des dérivées sont

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$
$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

2. Les transformées des dérivées impliquent des conditions initiales à $t = 0$. Appliquer les conditions initiales.
3. Simplifier l'équation transformée pour isoler $Y(s)$.
4. Au besoin, utiliser la décomposition en fractions partielles pour décomposer $Y(s)$ en composants plus simples.
5. Déterminer la transformée inverse de Laplace au moyen des tables et de la propriété de linéarité pour trouver $y(t)$.

Approche abrégée :

1. Trouver la caractéristique polynomiale de l'équation différentielle $p(s) = as^2 + bs + c$.
2. Remplacer $p(s)$, $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ et les conditions initiales dans l'équation

$$Y(s) = \frac{F(s) + a(y'(0) + sy(0)) + by(0)}{p(s)} \tag{4.4.1}$$

3. Au besoin, utiliser la décomposition en fractions partielles pour décomposer $Y(s)$ en composants plus simples.
4. Déterminer la transformée inverse de Laplace $Y(s)$ au moyen des tables et de la propriété de linéarité pour trouver $y(t)$.

Exemple 4.4.1 : Résoudre le PVI au moyen de la transformée de Laplace (approche générale)

Résoudre le problème de valeur initiale

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^{-2t}\ ; \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

Afficher/Masquer la solution

Approche générale

1. Prendre la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation

$$\mathscr{L}^{-1}\{y''\} - 5\mathscr{L}^{-1}\{y'\} + 6\mathscr{L}^{-1}\{y\} = 4\mathscr{L}^{-1}\{e^{-2t}\}$$

Si $Y(s) = \mathscr{L}^{-1}\{y\}$, on obtient

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = 4\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

2. Introduire dans les conditions initiales pour obtenir

$$s^2Y(s) + s - 2 - 5(sY(s) + 1) + 6Y(s) = 4\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

3. Rassembler des termes similaires et isoler $Y(s)$ pour obtenir

$$\left(s^2 - 5s + 6\right)Y(s) = \frac{4}{s+2} - s + 7$$

$$Y(s) = \frac{4/(s+2) - s + 7}{s^2 - 5s + 6}$$

Multiplier le dénominateur et le numérateur par $(s+2)$ et factoriser le dénominateur pour obtenir

$$Y(s) = \frac{-s^2 + 5s + 18}{(s+2)(s-3)(s-2)}$$

4. Décomposer en fractions partielles pour obtenir

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{24}{5}\left(\frac{1}{s-3}\right) - 6\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

5. À partir de la table 4.1, on voit que

$$\frac{1}{s-a} \leftrightarrow e^{at}$$

En prenant l'inverse, on obtient la solution de l'équation

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{24}{5}e^{3t} - 6e^{2t}$$

Exemple 4.4.2 : Résoudre le PVI au moyen de la transformée de Laplace (approche abrégée)

Résoudre le problème de valeur initiale

$$y'' + 4y = 3\sin(t)\ ; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

Afficher/Masquer la solution

Approche abrégée :

1. Le polynôme caractéristique est

$$p(s) = s^2 + 4$$

et

$$F(s) = \mathscr{L}^{-1}\{3\sin(t)\} = \frac{3}{s^2+1}$$

2. En les remplaçant ensemble par les valeurs initiales dans l'équation 4.4.1, on obtient

$$Y(s) = \frac{3/\left(s^2+1\right) + (-1 + s(1))}{s^2+4} = \frac{3/\left(s^2+1\right) + s - 1}{s^2+4}$$

Multiplier le dénominateur et le numérateur par $\left(s^2+1\right)$ pour obtenir

$$Y(s) = \frac{s^3 - s^2 + s + 2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

3. Décomposer en fractions partielles pour obtenir

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s-2}{s^2+4}$$
$$= \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}$$

4. À partir de la table 4.1,

$$\sin(bt) \leftrightarrow \frac{b}{s^2+b^2} \quad \text{et} \quad \cos(bt) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+b^2}$$

En prenant l'inverse, on obtient la solution de l'équation

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \sin(t) + \cos(2t) - \sin(2t)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=219

Section 4.4 Exercices

1. Résous le PVI en utilisant la transformée inverse de Laplace $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = -\frac{3}{7}e^{2t} - \frac{4}{7}e^{-5t}$$

2. Résous le PVI en utilisant la transformée inverse de Laplace $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$$y'' + 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = e^{-3t}(2\cos(2t) + 3\sin(2t))$$

3. Résous le PVI en utilisant la transformée inverse de Laplace $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$$y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = e^{4t}(1 - 5t)$$

4.5 TRANSFORMÉE DE LAPLACE DE FONCTIONS DÉFINIES PAR MORCEAUX

A. Fonction en escalier

Dans cette section, nous explorons l'application des transformées de Laplace à des fonctions continues par morceaux. Dans la section suivante, nous tâcherons de résoudre des problèmes de valeur initiale impliquant des équations différentielles du second ordre à coefficients constants où la fonction de forçage $f(t)$ est une fonction continue par morceaux.

Les discontinuités à saut fini se produisent souvent dans des situations physiques telles que des mécanismes de commutation ou des changements brusques de forces agissant sur le système. Pour traiter ces discontinuités dans le domaine de Laplace, nous utilisons la fonction échelon unité pour transformer des fonctions définies par morceaux en une forme adaptée aux transformées de Laplace et trouver ensuite des inverses continues par morceaux des transformées de Laplace pour la solution.

La **fonction échelon unité** (ou fonction de Heaviside) $u(t)$ est définie comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Elle passe de 0 à 1 par échelons (ou sauts) à $t = 0$. En déplaçant l'argument t, on peut déplacer l'échelon à différents endroits.

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t-a < 0 \\ 1 & t-a \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »>

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

La fonction en escalier peut également être transformée, par exemple déplacée, étendue ou comprimée. Par exemple, en multipliant $u(t)$ par une constante $M > 1$, on peut l'étendre verticalement.

$$Mu(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ M & t \geq a \end{cases}$$

Ou en combinant le déplacement et la réflexion de $u(t)$, on peut opposer la permutation de la fonction.

$$1 - u(t-a) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t \geq a \end{cases}$$

La fonction en escalier permet de représenter aisément n'importe quelle fonction continue par morceaux. Par exemple, prenons la fonction

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} f_0(t) & 0 \leq t < a \\ f_1(t) & t \geq a \end{cases} \\ &= f_0(t)\begin{cases} 1 & 0 \leq t < a \\ 0 & t \geq a \end{cases} + f_1(t)\begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases} \\ &= f_0(t)(1 - u(t-a)) + f_1(t)u(t-a) \end{aligned}$$

Elle peut être réécrite sous la forme

$$f(t) = f_0(t) + u(t-a)(f_1(t) - f_0(t)) \tag{4.5.1}$$

On peut étendre l'équation de la section 4.5.1 à des fonctions continues par morceaux plus générales.

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t) & 0 \le t < a \\ f_1(t) & a \le t < b \\ f_2(t) & t \ge b \end{cases}$$

$$f(t) = f_0(t) + u(t-a)(f_1(t) - f_0(t)) + u(t-b)(f_2(t) - f_1(t)) \tag{4.5.2}$$

B. Transformée de Laplace de fonctions définies par morceaux

La transformée de Laplace de la fonction modulée par échelons est essentielle pour résoudre les équations différentielles avec des fonctions de forçage définies par morceaux.

Théorème : transformée de Laplace d'une fonction modulée par échelons. Soit $g(t)$défini sur $[0, \infty)$ et $a \ge 0$, supposons que $\mathscr{L}\{g(t+a)\}$ existe pour $s > s_0$. Alors,

$$\mathscr{L}\{u(t-a)g(t)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\} \tag{4.5.3}$$

Ce théorème permet la transformation de fonctions modulées par échelons dans le domaine de Laplace, qui peut alors être manipulé algébriquement.

Exemple 4.5.1 : Trouver la transformée de Laplace d'une fonction modulée par échelons

Trouver la transformée de Laplace de $u(t-1)3t^2$.

Afficher/Masquer la solution

Pour appliquer l'équation 4.5.3, il faut prendre $g(t) = 3t^2$ et $a = 1$. On obtient ainsi

$$g(t+1) = 3(t+1)^2 = 3t^2 + 6t + 3$$

À partir de la table, on trouve $\mathscr{L}\{g(t+1)\}$.

$$\mathscr{L}\{g(t+1)\} = \mathscr{L}\{3t^2 + 6t + 3\}$$

$$= 3\mathscr{L}\{t^2\} + 6\mathscr{L}\{t\} + \mathscr{L}\{3\}$$

$$= \frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{3}{s}$$

Grâce à l'équation de la section 4.5.3, on obtient

$$\mathscr{L}\{u(t-1)3t^2\} = e^{-s}\left(\frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{3}{s}\right)$$

Exemple 4.5.2 : Trouver la transformée de Laplace d'une fonction définie par morceaux

Trouver la transformée de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} 2t-1 & 0 \leq t < 2 \\ 4t & t \geq 2 \end{cases}$$

Afficher/Masquer la solution

Il faut d'abord écrire $f(t)$ en termes fonction en escalier en utilisant l'équation de la section 4.5.1 avec $a = 2$, $f_0(t) = 2t - 1$ et $f_1(t) = 4t$.

$$f(t) = 2t - 1 + u(t-2)(4t - 2t + 1)$$

$$= 2t - 1 + u(t-2)(2t+1)$$

En prenant la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{2t-1\} + \mathscr{L}\{u(t-2)(2t+1)\}$$

Pour appliquer l'équation 4.5.3 au second terme, on prend $g(t) = 2t + 1$ et $a = 2$.

$$g(t+2) = 2(t+2) + 1 = 2t + 5$$

On a donc

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{2t-1\} + e^{-2s}\mathscr{L}\{g(t+2)\}$$

$$= \mathscr{L}\{2t\} - \mathscr{L}\{1\} + e^{-2s}\mathscr{L}\{2t+5\}$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + e^{-2s}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{5}{s}\right)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=221

C. Transformée inverse de Laplace de fonctions définies par morceaux

Le théorème précédent permet également de déterminer la transformée inverse de Laplace des fonctions issues de fonctions définies par morceaux. Cependant, il sera plus pratique de déplacer l'argument de $g(t)$ et de remplacer $g(t)$ avec $g(t-a)$.

Théorème de translation en t . Si $a \geq 0$ et si $L(g)$ existe pour $s > s_0$, alors

$$\mathscr{L}\{u(t-a)g(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t)\}$$

Étant donné que $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$, c'est équivalent à

$$u(t-a)g(t-a) \leftrightarrow e^{-as}G(s) \qquad \textbf{(4.5.4)}$$

Exemple 4.5.3 : Trouver la transformée inverse de Laplace

Trouver la transformée inverse de Laplace de la fonction donnée et trouver des formules distinctes pour $h(t)$ aux intervalles appropriés.

$$H(s) = \frac{2}{s} - \frac{s}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right)$$

Afficher/Masquer la solution

Comme $H(s)$ a e^{-as} comme facteur, il faut utiliser l'équation 4.5.4 pour déterminer l'inverse.

Avec $H_0(s) = \frac{2}{s} - \frac{s}{s^2+1}$ et $H_1(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$, on obtient

$$h_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\} = 2 - \cos(t)$$

$$h_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos(t) - \sin(t)$$

En utilisant l'équation 4.5.4 avec $a = \frac{\pi}{2}$ et une linéarité de $\mathscr{L}^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{H_0(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}H_1(s)\right\} \\ &= h_0(t) + u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(h_1\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2-\cos(t) + u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

On peut simplifier en utilisant des identités trigonométriques : $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(t)$ et $\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$. L'application de ces identités donne

$$h(t) = 2-\cos(t) + u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)(\sin(t) + \cos(t))$$

Grâce à l'équation 4.5.1, on sait que

- L'expression sans fonction unité, $2-\cos(t)$, correspond à $f_0(t)$, la fonction active avant l'échelon.
- L'expression multipliée par la fonction unité, $\sin(t) + \cos(t)$, représente le changement dans la fonction à l'échelon, correspondant donc à $f_1 - f_0$.

Étant donné que $f_0(t) = 2-\cos(t)$, il est possible de trouver la valeur de $f_1(t)$.

$$f_1 - f_0 = \sin(t) + \cos(t)$$
$$f_1 - (2 - \cos(t)) = \sin(t) + \cos(t)$$
$$f_1(t) = \sin(t) + 2$$

On peut maintenant exprimer $h(t)$ comme une fonction définie par morceaux.

$$h(t) = \begin{cases} 2 - \cos(t) & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin(t) + 2 & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=221

Section 4.5 Exercices

1. Trouve la transformée de Laplace, $F(s)$, de $f(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 3 \\ 2(t-3) & \text{si} \quad 3 \leq t < 7 \\ 8 & \text{si} \quad t > 7 \end{cases}.$$

Afficher/Masquer la réponse

$$F(s) = \frac{2e^{-3s}}{s^2} - \frac{2e^{-7s}}{s^2}$$

2. Prends la transformée inverse de Laplace pour déterminer $y(t)$. Entre $u_a(t)$ pour $u(t-a)$ si la fonction unité est une partie de l'inverse.

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4s + 8}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2(t-2))e^{-2(t-2)}u_2(t)$$

3. Applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle et trouve la valeur de $Y(s)$.

$$y'' + 9y = 4(t-2)u_2(t) - 4(t-3)u_3(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Afficher/Masquer la réponse

$$Y(s) = \frac{4e^{-2s} - 4e^{-3s}}{s^2(s^2+9)}$$

4.6 PVI AVEC FONCTIONS DE FORÇAGE DÉFINIES PAR MORCEAUX

Résolution de problèmes de valeur initiale avec des fonctions de forçage définies par morceaux

Dans la section suivante, nous abordons les problèmes de valeur initiale (PVI) pour des équations différentielles du second ordre à coefficients constants lorsque la fonction de forçage $f(t)$ est une fonction continue par morceaux.

$$ay'' + by' + cy = f(t);\ y(0) = k_0,\ \ y'(0) = k_1$$

Comment résoudre des PVI avec des fonctions de forçage définies par morceaux au moyen de la méthode de la transformée de Laplace

1. Écrire la fonction de forçage définie par morceaux en termes de fonction en escalier.
2. Déterminer la transformée de Laplace de l'équation différentielle.
3. Résoudre l'équation transformée pour $Y(s)$.
4. Utiliser les tables de transformées de Laplace et le théorème de translation vus dans les sections précédentes pour déterminer la transformée inverse de Laplace.
5. Au besoin, réécrire $y(t)$ sous forme définie par morceaux.

Exemple 4.6.1 : Résoudre le PVI au moyen de la transformée de Laplace

Résoudre le problème de valeur initiale donné.

$$y'' - 3y' - 10y = 5 - 3tu_2(t), \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 4$$

Afficher/Masquer la solution

1. La fonction de forçage $f(t)$ est déjà sous la forme modulée par échelons, avec $u_2(t) = u(t-2)$.

2. En prenant la transformée de Laplace de l'équation, on a

$$\mathscr{L}\{y''\} + \mathscr{L}\{-3y''\} + \mathscr{L}\{-10y\} = \mathscr{L}\{5\} + \mathscr{L}\{-3tu(t-2)\}$$

Soit $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ et sachant que $\mathscr{L}\{tu(t-2)\} = e^{-2s}\mathscr{L}\{t+2\}$ (application de l'équation de la section 4.5.3), on obtient

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sY(s) - y(0)) - 10Y(s) = \frac{5}{s} - 3e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$$

En appliquant les conditions initiales, on obtient

$$s^2Y(s) - 4 - 3sY(s) - 10Y(s) = \frac{5}{s} - 3e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$$

3. La résolution pour $Y(s)$ donne

$$(s^2 - 3s - 10)Y(s) = \frac{5}{s} - 3e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right) + 4$$

$$Y(s) = \frac{5}{s(s^2-3s-10)} - \frac{3e^{-2s}}{s^2(s^2-3s-10)} - \frac{6e^{-2s}}{s(s^2-3s-10)} + \frac{4}{s^2-3s-10}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2-3s-10}(4) + \frac{1}{s(s^2-3s-10)}(5 - 6e^{-2s}) + \frac{1}{s^2(s^2-3s-10)}(-3e^{-2s})$$

En factorisant les dénominateurs, on obtient

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s-5)}(4) + \frac{1}{s(s+2)(s-5)}(5 - 6e^{-2s}) +$$

La formule n'est pas analysée

4. Pour trouver $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$, on note que

$$Y(s) = 4F(s) + (5 - 6e^{-2s})G(s) + (-3e^{-2s})H(s)$$

où

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s-5)} = -\frac{1}{7}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{s-5}\right)$$

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)(s-5)} \;=\; -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{14}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\frac{1}{35}\left(\frac{1}{s-5}\right)$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2(s+2)(s-5)}$$

$$=\frac{3}{100}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{28}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\frac{1}{175}\left(\frac{1}{s-5}\right)$$

En calculant la transformée inverse de Laplace de $F(s)$, $G(s)$ et $H(s)$, on obtient

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} \;=\; -\frac{1}{7}e^{-2t}+\frac{1}{7}e^{5t}$$

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} \;=\; -\frac{1}{10}+\frac{1}{14}e^{-2t}+\frac{1}{35}e^{5t}$$

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} \;=\frac{3}{100}-\frac{t}{10}-\frac{1}{28}e^{-2t}+\frac{1}{175}e^{5t}$$

Pour faciliter le processus d'inversion, on réécrit d'abord $Y(s)$.

$$Y(s)=4F(s)+5G(s)-3e^{-2s}(2G(s)+H(s))$$

En prenant la transformée inverse et en appliquant le théorème de translation pour les termes avec le terme exponentiel, on obtient

$$\begin{aligned} y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = {} & 4\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}+5\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} \\ & -3\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-2s}(2G(s)+H(s))\right\} \end{aligned}$$

$$=4f(t)+5g(t)-3u(t-2)(2g(t-2)+h(t-2))$$

$$=4\left(-\frac{1}{7}e^{-2t}+\frac{1}{7}e^{5t}\right)+5\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}e^{-2t}+\frac{1}{35}e^{5t}\right)-$$
$$3u_2(t)\left[2\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}e^{-2(t-2)}+\frac{1}{35}e^{5(t-2)}\right)+\left(\frac{3}{100}-\frac{t-2}{10}-\frac{1}{28}e^{-2(t-2)}+\frac{1}{175}e^{5(t-2)}\right)\right]$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=223

Exemple 4.6.2 : Résoudre le PVI au moyen de la transformée de Laplace – Fonction de forçage définie par morceaux

Le courant I dans un circuit série LC est régi par le problème de valeur initiale suivant. Déterminer le courant en termes de t.

$$I''(t) + 9I(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases} \qquad I(0) = 0, \quad I'(0) = 0$$

Afficher/Masquer la solution

1. La fonction de forçage $f(t)$ peut être écrite en termes de fonction en escalier sous la forme

$$f(t) = 1 + u(t-1)(-1-1) + u(t-2)(0-(-1))$$

$$= 1 - 2u(t-1) + u(t-2)$$

2. En prenant la transformée de Laplace de l'équation, on a

$$\mathscr{L}\{I''\} + \mathscr{L}\{9I\} = \mathscr{L}\{1 - 2u(t-1) + u(t-2)\}$$

Si $J(s) = \mathscr{L}\{I\}$, on obtient

$$s^2 J(s) + 9J(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

3. La solution pour $J(s)$ donne

$$J(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} - \frac{2e^{-s}}{s(s^2+9)} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+9)}$$

4. Pour trouver $I(t) = \mathscr{L}^{-1}\{J(s)\}$, on note que

$$J(s) = G(s) - 2e^{-s}G(s) + e^{-2s}G(s)$$

où

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)$$

En calculant le transformée inverse de Laplace de $G(s)$, on obtient

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t)$$

En appliquant le théorème de translation, on obtient

$$\begin{aligned} I(t) = \mathscr{L}^{-1}\{J(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s}G(s)\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-2s}G(s)\right\} \\ &= g(t) - 2g(t-1)u(t-1) + g(t-2)u(t-2) \\ &= \frac{1}{9}(1-\cos(3t)) - \frac{2}{9}(1-\cos(3(t-1)))u(t-1) \\ &\quad + \frac{1}{9}(1-\cos(3(t-2)))u(t-2) \end{aligned}$$

5. Ce résultat peut être écrit sous la forme de la fonction définie par morceaux

$$I(t) = -\frac{1}{9}\begin{cases} \cos(3t) - 1 & 0 < t < 1 \\ 1 + \cos(3t) - 2\cos(3t-3) & 1 < t < 2 \\ \cos(3t) - 2\cos(3t-3) + \cos(3t-6) & t > 2 \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente le graphique du courant $I(t)$.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=223

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=223

Section 4.6 Exercices

1. Résous le problème de valeur initiale suivant. Ne donne que la solution de $2 \leq t < 3$.

$$y'' + 10y' + 26y = \begin{cases} 3 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \text{ ou } t < 2 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = \frac{3}{26}\left(1 - e^{-5(t-2)}\cos(t-2) - 5e^{-5(t-2)}\sin(t-2)\right)$$

2. La solution du PVI

$$y'' - 5y' + 6y = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

présente la forme $y(t) = f(t) - g(t)u_6(t)$. Trouve les fonctions $f(t)$ et $g(t)$.

Afficher/Masquer la réponse

$$f(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$
$$g(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3(t-6)} - \frac{1}{2}e^{2(t-6)}$$

3. La solution du PVI

$$y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 9 \\ 0 & t \geq 9 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

présente la forme $y(t) = f(t) - g(t)u_9(t)$. Trouve les fonctions $f(t)$ et $g(t)$.

Afficher/Masquer la réponse

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} - e^{t}$$
$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2(t-9)} - e^{(t-9)}$$

4.7 FONCTION DELTA DE DIRAC (IMPULSION)

Dans les sections précédentes, nous avons exploré des problèmes de valeur initiale pour des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, en nous concentrant sur les cas où la fonction de forçage, $f(t)$, est soit continue, soit continue par morceaux sur l'intervalle $[0, \infty)$.

$$ay'' + by' + cy = f(t)\ ;\ y(0) = k_0,\ \ y'(0) = k_1$$

Intéressons-nous maintenant à un autre type de fonction de forçage : celle qui représente une force d'impulsion. Les forces d'impulsion se caractérisent par des amplitudes très importantes sur des intervalles de temps extrêmement courts, à la façon d'une brusque « secousse » ou d'un « pic » soudain dans le système. De telles impulsions se produisent dans divers contextes, notamment dans les circuits électriques lors de l'activation, dans les systèmes mécaniques lors d'une collision ou dans tout scénario où une force soudaine et importante est appliquée pendant une brève période.

A. Fonction delta de Dirac

Pour modéliser mathématiquement ces forces d'impulsion, on utilise la fonction delta de Dirac, à savoir $\delta(t)$. La fonction delta de Dirac n'est pas une fonction au sens traditionnel du terme, mais plutôt une fonction généralisée ou une distribution dotée des propriétés suivantes.

1. Nulle partout sauf en 0 :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{if} \quad t = 0 \end{cases}$$

2. Intégrale égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

3. Propriété de criblage :

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) = f(0)$ pour toute fonction $f(t)$ qui est continue sur l'intervalle contenant $t = 0$

En déplaçant l'argument t dans $\delta(t)$, il est possible de modéliser les impulsions qui se produisent à des instants autres que $t = 0$. La fonction delta de Dirac déplacée, $\delta(t - a)$, marque un pic à $t = a$ et est définie comme suit :

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq a \\ \infty & \text{si} \quad t = a \end{cases}$$

La propriété de criblage s'étend donc à

4. Criblage en $t = a$:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) = f(a)$ pour toute fonction $f(t)$ qui est continue sur l'intervalle contenant $t = a$

B. Transformée de Laplace de la fonction delta de Dirac

La transformée de Laplace offre une moyen pratique traiter la fonction Delta de Dirac dans le cadre de la résolution d'équations différentielles. La transformée d'une fonction delta de Dirac déplacée est donnée par

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \tag{4.7.1}$$

Il importe de comprendre la fonction Delta de Dirac et ses propriétés pour modéliser et analyser des systèmes soumis à des forces d'impulsion.

Exemple 4.7.1 : Résoudre le PVI avec une fonction de forçage impulsive

Trouver la solution du problème de valeur initiale

$$y'' + 16y = 4\delta(t-\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Afficher/Masquer la solution

En prenant la transformée de Laplace de l'équation et en appliquant l'équation de la section 4.7.1 avec $a = \pi$ à la fonction delta, on obtient

$$s^2Y(s) - s + 16Y(s) = 4e^{-\pi s}$$

La résolution pour $Y(s)$ donne

$$Y(s) = \frac{4e^{-\pi s} + s}{s^2 + 16}$$

$$= e^{-\pi s}\frac{4}{s^2+16} + \frac{s}{s^2+16}$$

En calculant la transformée inverse de Laplace, on obtient

$$y(t) = u(t-\pi)\sin(4(t-\pi)) + \cos(4t)$$

Ce qui est équivalent à

Formula does not parse

La formule n'est pas analysée

La figure ci-dessous montre $y(t)$. La force d'impulsion est appliquée et ajoute de l'élan au système en $t = \pi$. Pour comparaison, la ligne en pointillés représente le système non perturbé.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=225

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=225

Section 4.7 Exercices

1. Résous le problème de valeur initiale

$$y'' + 25y = \delta(t-4), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad t < 4 \\ \frac{1}{5}\sin(5(t-4)) \quad \text{if} \quad t \geq 4 \end{cases}$$

2. Résous le problème de valeur initiale

$$y'' + 4y = 80e^{4t} + \delta(t-7), \quad y(0) = 11, \; y'(0) = 32$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y(t) = \begin{cases} 7\cos(2t) + 8\sin(2t) + 4e^{4t} \quad \text{si} \quad t < 7 \\ 7\cos(2t) + 8\sin(2t) + 4e^{4t} + \frac{1}{2}\sin(2(t-7)) \quad \text{si} \quad t \geq 7 \end{cases}$$

4.8 APPLICATION : CIRCUITS ÉLECTRIQUES

A. Introduction

Cette section décrit brièvement l'utilisation pratique de la transformée de Laplace dans le domaine du génie électrique pour résoudre des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles associés à des circuits électriques. La transformée de Laplace est particulièrement utile pour convertir ces équations différentielles en formes algébriques plus faciles à gérer.

Commençons par un problème de valeur initiale (PVI) issu d'un circuit RLC de base. Nous démontrons comment la transformée de Laplace peut simplifier la recherche du courant du circuit en fonction du temps en traduisant une équation différentielle en une équation algébrique.

Exemple 4.8.1 : Circuit série RLC – Équation différentielle linéaire

Prenons un circuit série RLC avec une résistance de $0{,}06\ \Omega$, un inducteur de $0{,}01\ \mathrm{H}$ et un condensateur de $\dfrac{50}{89}\ \mathbf{F}$ alimenté par une source de tension de $E(t) = 0{,}1\sin(10t)\ \mathrm{V}$. Au départ, le courant et la charge sur le condensateur sont nuls. Déterminer le courant dans le circuit en fonction du temps.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- Résistance : $R = 0{,}06\ \Omega$
- Inducteur : $L = 0{,}01\ \mathrm{H}$
- Condensateur : $C = \dfrac{50}{89}\ \mathbf{F}$
- Source de tension : $E(t) = 0{,}1\sin(10t)\ \mathrm{V}$
- Courant initial du condensateur : $I(0) = 0$
- Charge initiale du condensateur : $q(0) = I'(0) = 0$

Dans l'exemple 3.9.1, nous avons développé le problème de valeur initiale régissant ce circuit RLC.

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 6\frac{dI}{dt} + 178I = 100\cos(10t), \quad I(0) = 0, \ I'(0) = 0$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle, on trouve

$$\mathscr{L}\{I''\} + 6\mathscr{L}\{I'\} + 178\mathscr{L}\{I\} = \frac{100s}{s^2 + 10^2}$$

Si $\mathscr{L}\{I(t)\} = J(s)$, on a

$\mathscr{L}\{I''\} = s^2 J(s) - sI(0) - I'(0) = s^2 J(s)$

$\mathscr{L}\{I'\} = sJ(s) - sI(0) = sJ(s)$

Comme $I(0)$ et $I'(0)$ sont tous deux nuls, l'équation peut être simplifiée en

$$s^2 J(s) + 6sJ(s) + 178J(s) = \frac{100s}{s^2 + 10^2}$$

En résolvant $J(s)$, on trouve

$$J(s) = \frac{100s}{(s^2 + 10^2)(s^2 + 6s + 178)}$$

En décomposant $J(s)$ en fractions partielles, on obtient

$$J(s) = \frac{1}{807}\left(\frac{650s + 5\,000}{s^2 + 10^2}\right) - \frac{1}{807}\left(\frac{650s + 8\,900}{s^2 + 6s + 178}\right)$$

Pour simplifier la seconde fraction, il faut compléter le carré.

$$J(s) = \frac{650}{807}\left(\frac{s}{s^2 + 10^2}\right) + \frac{5\,000}{807}\left(\frac{1}{s^2 + 10^2}\right) - \frac{650}{807}\left(\frac{s}{(s+3)^2 + 13^2}\right) - \frac{8\,900}{807}\left(\frac{1}{(s+3)^2 + 13^2}\right)$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace à $J(s)$, on obtient le courant $I(t)$.

$$I(t) = \frac{650}{807}\cos(10t) + \frac{500}{807}\sin(10t) + e^{-3t}\left(-\frac{650}{807}\cos(13t) - \frac{6\,950}{10\,491}\sin(13t)\right)$$

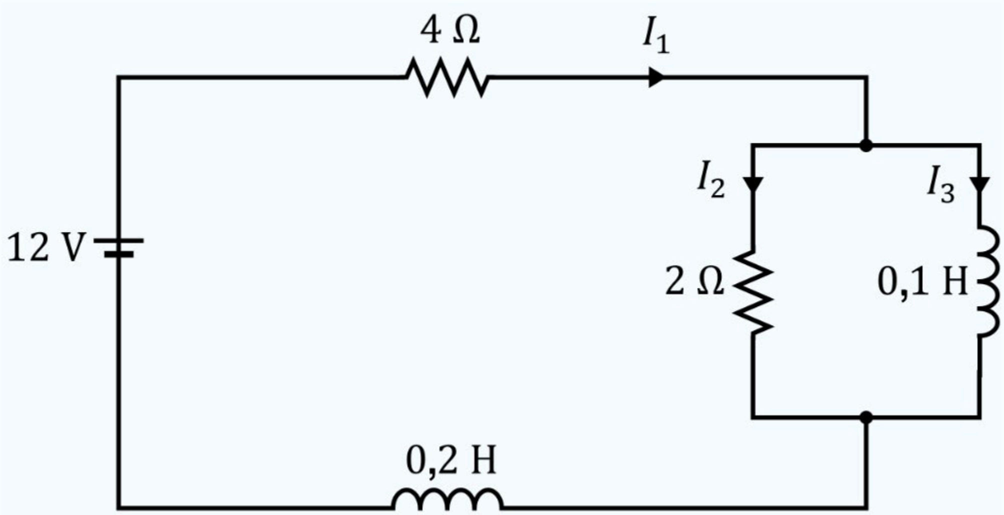
Ce résultat est conforme à celui que nous avons obtenu dans l'exemple 3.9.1 en résolvant le problème de valeur initiale au moyen de la méthode des coefficients indéterminés.

B. Résolution de systèmes d'équations linéaires avec la transformée de Laplace

La transformée de Laplace peut être appliquée pour transformer certains systèmes d'équations différentielles avec valeurs initiales en systèmes d'équations algébriques dans le domaine s. La résolution de ces équations algébriques permet de trouver des fonctions de s, que l'on peut ensuite reconvertir en solutions dans le domaine temporel à l'aide de la transformée inverse de Laplace. Nous aborderons ensuite un exemple plus complexe impliquant un circuit série-parallèle RL, qui se traduit par un système d'équations différentielles.

Exemple 4.8.2 : Circuit série RL – Système d'équations linéaires

a) Pour le schéma de circuit électrique donné, déterminer le système d'équations différentielles qui décrit les courants dans les différentes branches du circuit. Supposons que tous les courants initiaux sont nuls. **b)** Une fois que le système d'équations différentielles et les conditions initiales sont établis, résoudre le système pour les courants dans chaque branche du circuit.



Description du schéma

Prenons un circuit alimenté par une batterie de 12 V CC. Une résistance de 4 Ω est branchée en série sur la borne positive de l'alimentation. Après cette résistance, le circuit se divise en deux branches parallèles. La première branche parallèle comporte une résistance de 2 Ω et la seconde un inducteur de 0,1 H. Ces deux branches convergent ensuite et le circuit continue à travers un inducteur de 0,2 H avant de revenir à la borne négative de l'alimentation. Compte tenu de cette configuration, calculer les courants I1 (aux bornes de la résistance de 4 Ω), I2 (aux bornes de la résistance de 2 Ω) et I3 (aux bornes de l'inducteur de 0,1 H). On suppose que les inducteurs sont en régime permanent.

Afficher/Masquer la solution

a.

On représente le courant passant par la branche principale par I_1, le courant passant par la résistance de 2 Ω par I_2 et le courant passant par l'inducteur de 0,1 H par I_3.

Étant donné que la baisse de tension aux bornes d'une résistance est RI et, aux bornes d'un inducteur, $L\dfrac{dI}{dt}$, on applique la loi des mailles de Kirchhoff au réseau électrique.

Dans la boucle principale comprenant un inducteur de 0,1 H, on trouve

$$4I_1 + 0{,}1\frac{dI_3}{dt} + 0{,}2\frac{dI_1}{dt} = 12$$

Dans la sous-branche comprenant la résistance de 2 Ω et l'inducteur de 0,1 H, on trouve

$$0.1\frac{dI_3}{dt} - 2I_2 = 0$$

De même, comme le courant I_1 est divisé en I_2 et I_3, on a

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Le système d'équations décrivant les courants dans le circuit est donc

$$\begin{cases} 4I_1 + 0{,}1I'_3 + 0{,}2I'_1 = 12 \\ 0{,}1I'_3 - 2I_2 = 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{cases} ; \ I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0 \tag{4.8.1}$$

b)

Pour résoudre le système, il faut appliquer la transformée de Laplace à chacune des équations du système :

$$\begin{cases} 4\mathscr{L}\{I_1\} + 0{,}1\mathscr{L}\{I'_3\} + 0{,}2\mathscr{L}\{I'_1\} = \frac{12}{s} \\ 0{,}1\mathscr{L}\{I'_3\} - 2\mathscr{L}\{I_2\} = 0 \\ \mathscr{L}\{I_1\} - \mathscr{L}\{I_2\} - \mathscr{L}\{I_3\} = 0 \end{cases} \tag{4.8.2}$$

Si $\mathscr{L}\{I_1\} = J_1(s)$, $\mathscr{L}\{I_2\} = J_2(s)$ et $\mathscr{L}\{I_3\} = J_3(s)$, on a

$$\mathscr{L}\{I'_1\} = sJ_1(s) - I_1(0) = sJ_1(s)$$
$$\mathscr{L}\{I'_3\} = sJ_3(s) - I_3(0) = sJ_3(s)$$

Comme les courants initiaux sont nuls, le système présenté à la section 4.8.2 peut être simplifié en

$$\begin{cases} 4J_1(s) + 0{,}1sJ_3(s) + 0{,}2sJ_1(s) = \frac{12}{s} \\ 0{,}1sJ_3(s) - 2J_2(s) = 0 \\ J_1(s) - J_2(s) - J_3(s) = 0 \end{cases}$$

Dans la troisième équation, on exprime $J_2(s)$ en fonction des deux autres variables.

$$J_2(s) = J_1(s) - J_3(s) \tag{4.8.3}$$

Ensuite, on remplace cette expression par $J_2(s)$ dans la deuxième équation, ce qui réduit le système à deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} 4J_1(s) + 0{,}1sJ_3(s) + 0{,}2sJ_1(s) = \frac{12}{s} \\ 0{,}1sJ_3(s) - 2(J_1(s) - J_3(s)) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (4 + 0{,}2s)J_1(s) + 0{,}1sJ_3(s) = \frac{12}{s} \\ -2J_1(s) + (0{,}1s + 2)J_3(s) = 0 \end{cases} \tag{4.8.4}$$

Pour éliminer $J_3(s)$, on multiplie la première équation par $(0{,}1s + 2)$ et la deuxième équation par $-0{,}1s$, à la suite de quoi on additionne les deux équations. Cela donne

$$(0{,}1s + 2)(4 + 0{,}2s)J_1(s) + 0{,}2sJ_1(s) \ = (0{,}1s + 2)\frac{12}{s}$$

En réarrangeant $J_1(s)$, on obtient

$$J_1(s) = \frac{1{,}2 + \frac{24}{s}}{0{,}02s^2 + s + 8}$$

Pour éliminer les termes décimaux et rationnels, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $50s$.

$$J_1(s) = \frac{60s + 1\,200}{s^3 + 50s^2 + 400s} = \frac{60s + 1\,200}{s(s^2 + 50s + 400)} = \frac{60s + 1\,200}{s(s + 10)(s + 40)}$$

En décomposant $J_1(s)$ en fractions partielles, on obtient

$$J_1(s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s + 10} - \frac{1}{s + 40}$$

En remplaçant $J_1(s)$dans la deuxième équation du système 4.8.4, on trouve $J_3(s)$.

$$J_3(s) = \frac{2J_1(s)}{0{,}1s + 2}$$
$$= \frac{120s + 2\,400}{s(s+10)(s+40)(0{,}1s+2)} = \frac{1\,200(0{,}1s+2)}{s(s+10)(s+40)(0{,}1s+2)}$$

Ce qui peut être simplifié en

$$J_3(s) = \frac{1200}{s(s+10)(s+40)}$$

En décomposant $J_3(s)$ en fractions partielles, on obtient

$$J_3(s) = \frac{3}{s} - \frac{4}{s+10} + \frac{1}{s+40}$$

En remplaçant les expressions pour $J_1(s)$ et $J_3(s)$ dans l'équation 4.8.3, on trouve $J_2(s)$.

$$J_2(s) = J_1(s) - J_3(s) = \frac{2}{s+10} - \frac{2}{s+40}$$

Enfin, en appliquant la transformée inverse de Laplace à J_1, J_2, et J_3, on détermine le courant dans les branches du circuit.

$$\mathscr{L}^{-1}\{J_1(s)\} = I_1(t) = 3 - 2e^{-10t} - e^{-40t}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{J_2(s)\} = I_2(t) = 2e^{-10t} - 2e^{-40t}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{J_3(s)\} = I_3(t) = 3 - 4e^{-10t} + e^{-40t}$$

4.9 TABLES DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE

Table 4.1 : Table des transformées de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$	**Domaine de** $F(s)$
C	$\dfrac{C}{s}$	$s > 0$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n, \ n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	$s > 0$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at}, \ n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin(bt)$	$\dfrac{b}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$\cos(bt)$	$\dfrac{s}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$e^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$t\sin(bt)$	$\dfrac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$	$s > 0$
$t\cos(bt)$	$\dfrac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$	$s > 0$
$\sinh(bt)$	$\dfrac{b}{s^2 - b^2}$	$s > \lvert b \rvert$
$\cosh(bt)$	$\dfrac{s}{s^2 - b^2}$	$s > \lvert b \rvert$

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$	**Domaine de** $F(s)$
Fonction en escalier : $u_a(t) = u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$
$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$a > 0$
Fonction delta de Dirac : $\delta(t-a)$	e^{-as}	$s > 0$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s > 0$
$t^k f(t)$	$(-1)^k F^{(k)}(s)$	
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s}$	
$\int_0^t f(t-x)g(x)dx$	$F(s).\,G(s)$	

Table 4.2 : Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété	Exemple
$\mathscr{L}\{f+g\} = \mathscr{L}\{f\} + \mathscr{L}\{g\}$	$\mathscr{L}\{t+\cos(2t)\} = \mathscr{L}\{t\} + \mathscr{L}\{\cos(2t)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+2^2}$
$\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$ pour n'importe quelle constante c	$\mathscr{L}\{4t\} = 4\mathscr{L}\{t\} = 4\left(\frac{1}{s^2}\right)$
$\mathscr{L}\{e^{at}f\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s-a)$	$\mathscr{L}\{e^{3t}\sin(5t)\} = \frac{5}{(s-3)^2+5^2}$
$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0)$	
$\mathscr{L}\{f''\} = s^2\mathscr{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$	
$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathscr{L}\{f\})$	$\mathscr{L}\{t^1\sin(7t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}(\mathscr{L}\{\sin(7t)\}) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{7}{s^2+7^2}\right) = \frac{14s}{(s^2+49)^2}$

SOLUTIONS EN SÉRIES DE PUISSANCES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Description du chapitre

Ce chapitre aborde la délicate question de la résolution d'équations différentielles complexes, souvent rencontrées dans des applications physiques, qui ne donnent pas de solutions exprimables par des fonctions standard. Il se concentre sur les solutions en séries de puissances, qui constituent une méthode alternative.

5.1 Étude des séries de puissances : cette section revisite le concept des séries de puissances, en examinant leurs principales propriétés et leur utilisation pour résoudre des équations différentielles.

5.2 Solutions en séries de puissances d'équations différentielles linéaires : cette section traite du processus de recherche des séries de puissance représentant les solutions d'équations différentielles linéaires.

Pionniers du progrès

Emmy Noether, née en 1882 à Erlangen, en Allemagne, est une figure emblématique des mathématiques et de la physique théorique, qui a surmonté les formidables barrières de genre de son époque pour révolutionner ces domaines. Bien que le sexe d'Emmy Noether lui ait initialement interdit d'occuper un poste universitaire, ses profondes contributions, en particulier dans les domaines de l'algèbre abstraite et de la physique théorique, lui ont valu une reconnaissance mondiale. Sa découverte la plus importante, le théorème de Noether, a dévoilé un lien fondamental entre les symétries et les lois de conservation en physique, un principe crucial dans de nombreux domaines régis par des équations différentielles. Ses travaux sur le calcul des variations, un domaine étroitement lié aux équations différentielles, ont fourni des outils essentiels aux physiciens et aux mathématiciens. Les idées de Noether sur la théorie des anneaux et les invariants algébriques ont également jeté les bases de l'algèbre moderne, en influençant les méthodes employées pour résoudre des équations différentielles. L'histoire d'Emmy Noether n'est pas seulement celle d'un exploit intellectuel remarquable, c'est aussi un récit de résilience et de persévérance contre les normes sociétales de son époque. Son héritage continue d'inspirer et de crédibiliser des

Emmy Noether (1882-1935). Source : auteur inconnu, domaine public, via Wikimedia Commons.

générations de mathématiciens et mathématiciennes et de scientifiques, symbolisant l'inlassable poursuite de la connaissance contre vents et marées.

5.1 ÉTUDE DES SÉRIES DE PUISSANCES

Les équations différentielles n'ont pas toutes des solutions qui peuvent être exprimées en termes de fonctions élémentaires telles que des polynômes, des exponentielles, des fonctions trigonométriques, etc. Même lorsque c'est le cas, la recherche explicite de ces solutions peut se révéler complexe, voire impossible. Les solutions de séries permettent de représenter la solution sous la forme d'une somme infinie de termes. Elles peuvent fournir des indications sur le comportement des solutions, notamment leur convergence, leur oscillation ou leurs propriétés de croissance lorsqu'aucune solution explicite n'est connue. Dans les applications pratiques, une solution exacte peut ne pas être nécessaire, et une série finie (une troncature de la série infinie) peut servir de solution approximative. Cette méthode est particulièrement utile dans les méthodes de calcul et les simulations.

Avant d'aborder les solutions d'équations différentielles en séries de puissances, examinons de plus près le concept de série de puissances et ses propriétés pertinentes.

A. Séries de puissances

Une série de puissances est une série infinie de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

où n est l'indice de sommation, a_n représente le coefficient du terme d'ordre n, x_0 est le centre de la série et x est la variable. La série peut être exprimée comme suit :

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

Cela nous permet d'approximer des fonctions dans les régions où la série converge, ce qui est essentiel pour comprendre et résoudre les équations différentielles. Nous pouvons parfois nous intéresser au modèle ou à la forme des termes initiaux de la série ou par la manipulation de termes tels que la réindexation ou la combinaison de termes. Nous pouvons donc « retirer » ces termes de la notation générale de la série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Ici, les deux premiers termes sont retirés de la notation générale de la série et l'indice de sommation commence désormais à $n = 2$.

B. Déplacement de l'indice d'une série de puissances

Le déplacement de l'indice d'une série de puissances modifie le point de départ de la sommation et réindexe les termes de la série. C'est particulièrement utile pour aligner les termes lors de l'addition ou de la soustraction de séries. Considérons une série de puissances

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$$

Déplacement à droite (indice croissant)

Pour déplacer la série à droite de k unité, il faut remplacer n par $n - k$ dans le terme général et ajouter k à la limite inférieure d'origine de la sommation.

$$\sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k}$$

Déplacement à gauche (indice décroissant)

Pour déplacer la série de k unité, il faut remplacer$n$ par $n + k$ dans le terme général et soustraire k de la limite inférieure d'origine de la sommation.

$$\sum_{n=n_0-k}^{\infty} a_{n+k} x^{n+k}$$

C. Combinaison linéaire de séries de puissances

Lorsque l'on résout des équations différentielles à l'aide de séries, il est souvent nécessaire d'ajouter ou de soustraire des séries. Lors de l'addition ou de la soustraction de séries, il faut s'assurer que les termes ajoutés ou soustraits correspondent à la même puissance de la variable. Autrement dit, il faut s'assurer que les deux séries ont la même puissance de $x - x_0$ et que leurs indices de sommation sont correctement alignés à partir de la même limite inférieure. Considérons deux séries de puissances

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Comme la puissance du terme $x - x_0$ est la même dans les deux séries et que, dans les deux, l'indice commence à la même valeur, elles peuvent être linéairement combinées en

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n)(x - x_0)^n$$

où c_1 et c_2 sont des constantes.

S'il y a un terme $x - x_0$ devant la sommation d'une série, on le déplace à l'intérieur de la sommation et on le combine avec le terme $(x - x_0)^n$. Par exemple,

$$(x - x_0)^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+c}$$

Cela simplifie la gestion et la manipulation des séries dans les solutions d'équations différentielles.

Exemple 5.1.1 : Combiner les séries de puissances

Écrire ce qui suit sous la forme d'une série unique en termes de $(x+2)^n$.

$$(x+2)^2 \sum_{n=3}^{\infty} na_n (x+2)^{n-4} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x+2)^{n+1}$$

Afficher/Masquer la solution

1. D'abord, on multiplie le terme $(x+2)^2$ dans la première sommation.

$$= \sum_{n=3}^{\infty} na_n (x+2)^{n-4+2} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x+2)^{n+1}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} na_n (x+2)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x+2)^{n+1}$$

2. Ensuite, on déplace les indices dans les deux séries de façon à ce que l'exposant de $(x+2)$ soit n . On peut ainsi déplacer la première série de deux unités sur la gauche et la seconde série d'une unité sur la droite.

$$= \sum_{n=3-2}^{\infty} (n+2)a_{n+2} (x+2)^{n+2-2} - \sum_{n=1+1}^{\infty} (n-1)a_{n-1} (x+2)^{n-1+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)a_{n+2} (x+2)^{n} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-1} (x+2)^{n}$$

3. Enfin, on s'assure que les deux séries commencent à la même limite inférieure. Selon la série, on peut parfois retirer des termes ou ajuster l'indice si les termes précédents sont déjà nuls. Il convient de noter que, si la seconde série commence à $n = 1$, le terme initial sera nul en raison du facteur $(n-1)$. Par conséquent, le fait de faire commencer l'indice à $n = 1$ ne modifie en rien sa valeur globale.

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)a_{n+2}(x+2)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}(x+2)^n$$

On combine maintenant les séries afin d'obtenir une seule et unique réponse finale.

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)a_{n+2} - (n-1)a_{n-1}](x+2)^n$$

Remarque : en général, quand une série contient un facteur de $(n-a)$, le terme à $n=a$ (où a est l'indice de départ) sera nul.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=234

D. Convergence de séries de puissances

La convergence des séries de puissances est essentielle pour garantir que la série représente la fonction avec précision sur un certain intervalle. Une série converge en un point particulier si la somme s'approche d'une limite finie lorsque n s'approche de l'infini. Autrement dit, une série de puissances **converge** pour un $x$donné si la limite suivante existe.

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n(x-x_0)^n$$ oo)somme_(n=0)^Na_n (x-x_0)^n » title= »lim_(N->oo)somme_(n=0)^Na_n (x-x_0)^n » class= »asciimath mathjax »>

Pour toute série de puissances, l'un ou l'autre des trois cas suivants peut être vrai :

- Converge uniquement en $x = x_0$: ici, la somme des séries est égale à a_0.

- Converge pour toutes les valeurs de x.
- Converge dans un rayon de convergence R : la série converge si $|x - x_0| < R$ et diverge si $|x - x_0| > R$. Rest appelé **rayon de convergence** et l'intervalle $(-R + x_0, R + x_0)$ est l'**intervalle de convergence**.

Pour déterminer le rayon et l'intervalle de convergence d'une série de puissances donnée, on utilise souvent le test de ratio. Le test de ratio consiste à prendre la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right| = L$$

oo)|(a_n+1)/(a_n)|=L » title= »lim_(n->oo)|(a_n+1)/(a_n)|=L » class= »asciimath mathjax »>

Si $L < 1$, la série converge et le rayon de convergence est $R = 1/L$.

E. Différenciation de séries de puissances

La différenciation et l'intégration des séries de puissances dans leur intervalle de convergence peuvent être effectuées terme par terme. Pour une série de puissances donnée centrée en x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

La dérivée première de $f(x)$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

Notez que l'indice de la dérivée première commence à $n = 1$, car le premier terme de la série originale est constant (a_0) et disparaît lors de la différenciation. L'intervalle de convergence de la série dérivée est au moins aussi grand que celui de la série originale, mais une attention particulière doit être portée aux extrémités.

De même, la dérivée seconde de $f(x)$ est

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{d}{dx}(x - x_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \end{aligned}$$

Notez que l'indice de la dérivée seconde commence à $n = 2$, car le premier terme de la dérivée première est constant (a_1) et disparaît lors de la différenciation.

Exemple 5.1.2 : Combiner les séries de puissances

Supposons que y peut être exprimé sous la forme d'une série de puissances $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Écrire ce qui suit sous la forme d'une seule série en termes de x^n.

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y$$

Afficher/Masquer la solution

1. Il faut d'abord trouver y' et y'' :

$$y' = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

2. Ensuite, on remplace y, y', et y'' dans l'expression :

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

3. En multipliant le terme x devant la sommation par le terme x dans le terme général de chaque série, on obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

4. On observe que l'exposant de x est le même dans toutes les séries sauf dans la première. Il suffit donc de décaler l'indice des premières sommations de 2 vers la gauche :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

5. Enfin, on s'assure que toutes les séries partent de la même limite inférieure Remarquez que la deuxième série est nulle à $n = 0, 1$ parce qu'il y a des facteurs n et $n-1$ dans le terme général de la série. Ainsi, son indice peut commencer à $n = 0$ sans changer de valeur. Pareillement, la troisième série est nulle à $n = 0$, de sorte qu'elle peut aussi commencer à $n = 0$. On réécrit donc les indices pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

En combinant les séries, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n(n-1)+2n-2)a_n]x^n$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=234

F. Propriétés des séries de puissances

Égalité des séries

Si deux séries de puissances sont égales pour tous les x dans un intervalle ouvert contenant x_0, alors leurs coefficients doivent être égaux. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

implique que $a_n = b_n$ pour tous les n.

Séries de puissances disparaissant sur un intervalle

Si une série de puissances est égale à zéro pour tous les x dans un intervalle ouvert, alors tous ses coefficients doivent être nuls. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$$

implique que $a_n = 0$ pour tous les n.

G. Séries de Taylor

Une série de Taylor est un type spécifique de représentation en série de puissances d'une fonction basée sur ses dérivées en un point spécifique, généralement en $x = x_0$. Elle est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ici, $f^n(x_0)$est la n-ième dérivée de $f(x)$ évaluée à $x = x_0$ et $n!$ est le factoriel de n.

Lorsque $x_0 = 0$, la série est souvent appelée série de Maclaurin. Les développements de Taylor d'une nouvelle fonction en $x = 0$ (série de Maclaurin) sont les suivants :

$$e^x = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

H. Relation récursive

Une relation récursive pour une série permet de calculer chaque terme de la série en utilisant un ou plusieurs des termes précédents. Au lieu de définir chaque terme indépendamment, la relation récursive relie chaque terme à ses prédécesseurs, construisant ainsi la série progressivement. Cette méthode est particulièrement utile lorsque le calcul direct des termes est complexe ou lorsque la relation entre des termes consécutifs est plus simple à exprimer.

En général, une relation récursive présente la structure suivante :

$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_{n-k})$ pour $n > k$k » title= »n>k » class= »asciimath mathjax »>

Ici, a_n est le terme d'ordre n de la série et f est une fonction qui définit le mode de calcul du terme d'ordre n en utilisant les termes k précédents.

La relation récursive permet de calculer tous les coefficients de la série à partir d'un ensemble de conditions initiales ou de coefficients connus. Ceux-ci sont généralement dérivés des conditions initiales ou limites de l'équation différentielle.

Exemple 5.1.3 : Trouver les termes d'une série au moyen de la relation récursive

Supposons que la formule récursive pour la solution d'une série de puissance soit

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+4)}$$

Trouver les deuxième, troisième et quatrième termes de la série en termes de a_0 et a_1.

Afficher/Masquer la solution

Pour trouver les termes, il faut introduire $n = 0, 1, 2...$ dans la relation récursive.

$$n = 0 \ \rightarrow \ a_{0+2} = -\frac{a_0}{(0+1)(0+4)} \ \rightarrow \ a_2 = -\frac{a_0}{4}$$ \ a_(0+2)=- a_0/((0+1)(0+4))\ ->\ a_2=-a_0/4″ title= »n=0\ ->\ a_(0+2)=-a_0/((0+1)(0+4))\ ->\ a_2=-a_0/4″ class= »asciimath mathjax »>

$$n = 1 \ \rightarrow \ a_{1+2} = -\frac{a_1}{(1+1)(1+4)} \ \rightarrow \ a_3 = -\frac{a_1}{10}$$ \ a_(1+2)=- a_1/((1+1)(1+4))\ ->\ a_3=-a_1/10″ title= »n=1\ ->\ a_(1+2)=-a_1/((1+1)(1+4))\ ->\ a_3=-a_1/10″ class= »asciimath mathjax »>

$$n = 2 \ \rightarrow \ a_{2+2} = -\frac{a_2}{(2+1)(2+4)} \ \rightarrow \ a_4 = -\frac{a_2}{18}$$ \ a_(2+2)=- a_2/((2+1)(2+4))\ ->\ a_4=-a_2/18″ title= »n=2\ ->\ a_(2+2)=-a_2/((2+1)(2+4))\ ->\ a_4=-a_2/18″ class= »asciimath mathjax »>

Étant donné que $a_2 = -\frac{a_0}{4}$, a_4 peut être écrit en termes de a_0 :

$$a_4 = -\frac{1}{18}\left(-\frac{a_0}{4}\right) = \frac{a_0}{72}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=234

Section 5.1 Exercices

1. Écris ce qui suit sous la forme d'une série unique en termes de x^n.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} -2na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} -3a_n x^n$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 3a_n]x^n$$

2. Supposons y puisse être exprimé sous la forme d'une série de puissances $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Écris ce qui suit sous la forme d'une série unique en termes de x^n.

$$y'' - 5xy' + 2y$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 5na_n + 2a_n]x^n$$

3. Supposons que la formule récursive pour la solution d'une série de puissance soit

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

Trouvez les quatrième et cinquième termes en termes de a_0 et a_1.

Afficher/Masquer la réponse

$$a_4 = -\frac{a_0}{24}$$
$$a_5 = \frac{a_1}{120}$$

5.2 SOLUTIONS EN SÉRIES DE PUISSANCES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Solutions en séries de puissances d'équations différentielles linéaires

Dans les sections précédentes, nous nous sommes principalement intéressés aux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants. Cependant, de nombreuses applications physiques conduisent à des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre plus complexes de la forme

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{5.2.1}$$

où $P_0,\ P_1,$ et P_2 sont des polynômes sans facteur commun. Souvent, les solutions à l'équation de la section 5.2.1 ne peuvent pas être exprimées sous la forme de fonctions familières, ce qui incite à utiliser des solutions en séries. On commence par normaliser l'équation en la divisant par $P_0(x)$ afin que le coefficient de y'' soit égal à 1.

$$y'' + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}y' + \frac{P_2(x)}{P_0(x)}y = 0$$

Étant donné la continuité des polynômes, $P_1 / P_0,$ et P_2 / P_0 sont continus, sauf éventuellement lorsque$P_0(x_0) = 0$. Un point x_0 où $P_0(x_0) \neq 0$ est appelé **point ordinaire** de l'équation de la section 5.2.1; sinon, c'est un **point singulier**. Il faut savoir que, aux points ordinaires, P_1 / P_0 et P_2 / P_0 sont **analytiques**, ce qui autorise la représentation en série de puissances.

Théorème. Supposons que $P_0,\ P_1,$ et P_2 sont des polynômes sans facteur commun et que $P_0(x) \neq 0$. Si x_0 est un point ordinaire de l'équation de la section 5.2.1, de sorte que chaque solution de l'équation peut être représentée par une série de puissances.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{5.2.2}$$

En outre, le rayon de convergence R d'une telle solution en série de puissances est au moins aussi grand que la distance entre x_0 et le point singulier (réel ou complexe) le plus proche de l'équation. Si P_0 est constant, c'est-à-dire jamais nul, le rayon de convergence sera infini et l'intervalle de convergence sera $(-\infty,\ +\infty)$.

Pour trouver la solution en série de l'équation de la section 5.2.1, on considère une série de puissances convergeant près d'un point ordinaire x_0. En supposant que la solution peut être écrite sous forme de série de puissances (section 5.2.2), on remplace y et ses dérivées dans l'équation différentielle donnée et on rassemble les puissances similaires de$x - x_0$. En fixant le coefficient de chaque puissance à zéro, on peut systématiquement trouver la valeur des coefficients a_n, ce qui donne souvent une relation récursive.

Comment trouver une solution en série à une équation

différentielle

1. Déterminer l'équation différentielle et choisir le point x_0 autour duquel développer la série (généralement un point ordinaire).

2. Supposer une solution en série de puissances (équation de la section 5.2.2) pour y et trouver ses dérivées y', y'', etc., comme l'exige l'équation différentielle.

3. Remplacer la série et ses dérivées dans l'équation différentielle.

4. Organiser les puissances similaires $x - x_0$ en alignant les termes, de façon à ce que toutes les séries soient exprimées à partir de la même valeur de départ de n.

5. Regrouper les coefficients des puissances similaires de $x - x_0$.

6. Résoudre les équations en mettant en équation les coefficients de puissances similaires de $x - x_0$ pour trouver des relations entre les a_n's.

7. Utiliser les conditions initiales ou limites données pour trouver des a_n spécifiques. Utiliser la relation récursive pour déterminer tous les coefficients.

8. Construire la solution avec les coefficients trouvés et examiner le rayon et l'intervalle de convergence.

Exemple 5.2.1 : Trouver une solution en série à une équation à coefficients constants

Déterminer une solution en série à l'équation différentielle

$$y'' + y = 0$$

Afficher/Masquer la solution

1. Étant donné que $P_1(x) = 1$, les coefficients sont analytiques en tout point. On suppose que $x_0 = 0$ et que la solution peut être écrite sous forme de série de puissances.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

2. Il faut d'abord trouver y'' :

$$y' = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y'' = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

3. Ensuite, on remplace y et y'' dans l'équation :

$$y'' + y = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

4. L'étape suivante consiste à aligner les termes. Pour ce faire, il faut déplacer les indices de sommation de façon à ce qu'ils commencent à la même valeur. Si $k = n - 2$ ou $n = k + 2$ dans la première sommation et $n = k$ dans la deuxième sommation, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

5. En additionnant les séries, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k] x^k = 0$$

6. D'après la propriété des séries de puissances disparaissant sur un intervalle vue à la section 5.1, on sait que si une série de puissances est nulle x, alors tous ses coefficients doivent être nuls. On en conclut donc que

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k = 0$$

ou

$$a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 0$$

C'est ce que l'on appelle la **relation de récurrence** pour les valeurs de $k$pour lesquelles la relation est vraie.

7. Ensuite, on écrit quelques termes de la série pour voir si l'on peut déterminer la tendance et, avec un peu de chance, la formule explicite de la série. Quand $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$, on a

$k=0 \to \; a_2 = \dfrac{-a_0}{(2)(1)}$	$k=1 \to \; a_3 = \dfrac{-a_1}{(3)(2)}$
$k=2 \to \; a_4 = \dfrac{-a_2}{(4)(3)}$ $= \dfrac{a_0}{(4)(3)(2)(1)}$	$k=3 \to \; a_5 = \dfrac{-a_3}{(5)(4)}$ $= \dfrac{a_1}{(5)(4)(3)(2)}$
$k=4 \to \; a_6 = \dfrac{-a_4}{(6)(5)}$ $= \dfrac{-a_0}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}$	$k=5 \to \; a_7 = \dfrac{-a_5}{(7)(6)}$ $= \dfrac{-a_1}{(7)(6)(5)(4)(3)(2)}$

On remarque que le terme avec des indices pairs peut être écrit par rapport au terme précédent et même en termes de a_0 et qu'il en va de même avec les indices impairs en termes de a_1. Par conséquent, en écrivant la relation de récurrence séparément pour les indices ($k = 2m+1$) impairs et les indices ($k = 2\,m$) pairs, on obtient

$$a_{2\,m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2\,m)!} \;,\; m \geq 0$$

$$a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!} \;,\; m \geq 0$$

8. La solution générale de l'équation peut donc être écrite sous la forme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2\,m} x^{2\,m} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} x^{2m+1}$$

$$= a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

On constate que les séries dans la solution sont les séries de Maclaurin de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$, respectivement.

$$\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation peut être exprimée sous la forme

$$y = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

pour des constantes arbitraires a_0 et a_1. Cette solution est identique à celle que nous obtiendrions avec les méthodes abordées aux sections précédentes.

L'intervalle de convergence pour les séries de cosinus et de sinus est constitué de tous les nombres réels $(-\infty, \infty)$.

Pour les deux séries de la solution, le test de ratio indique que, à mesure que $m \to \infty$oo » title= »m->oo » class= »asciimath mathjax »>, la limite L approche de zéro, ce qui signifie que la série converge pour tous les nombres réels. Partant, sans connaissance préalable des séries représentant le sinus et le cosinus, on conclurait que l'intervalle de convergence pour chaque série et donc la solution de séries combinées est un nombre réel entier $(-\infty, \infty)$.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=236

Dans la pratique, nous essayons de trouver des solutions en série pour des équations à coefficients non constants. En effet, les équations à coefficients constants peuvent être facilement résolues à l'aide de la technique décrite au chapitre 3 pour les équations homogènes à coefficients constants. Prenons un autre exemple pour une équation à coefficients non constants.

Exemple 5.2.2 : Trouver une solution en série à une équation à coefficients variables

Trouver une solution en série à l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

Afficher/Masquer la solution

1. On note que $P_1(x) = 1 + x^2$ n'a pas de racine, de sorte que chaque point dans cette équation constitue un point ordinaire. On suppose que la solution peut être écrite sous forme de série de puissances.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

2. Ensuite, on trouve y' et y'' :

$$y' = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

3. On remplace maintenant $y,\ y',$ et y'' dans l'équation :

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

En multipliant les coefficients par la série, on obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

4. On observe que l'exposant de x est le même dans toutes les séries sauf la première. Il suffit donc de décaler l'indice des premières sommations de 2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

On remarque maintenant que la deuxième série est nulle à $n = 0, 1$. L'indice peut donc commencer à $n = 0$. Pareillement, la troisième série est nulle à $n = 0$, de sorte qu'elle peut aussi commencer à $n = 0$. On réécrit donc les indices pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

5. En combinant les séries, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1)+2n-2)a_n]x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left(n^2+n-2\right)a_n\right]x^n = 0$$

6. En définissant un coefficient nul, on obtient

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left(n^2+n-2\right)a_n = 0$$
$$a_{n+2} = -\frac{n^2+n-2}{(n+2)(n+1)}a_n$$
$$= -\frac{(n+2)(n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

7. La relation récursive peut donc être simplifiée en

$$a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1}a_n$$

Avec $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$, on obtient

$n = 0 \to \; a_2 = a_0$

$n = 1 \to \; a_3 = 0a_1 = 0$

$n = 2 \to \; a_4 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}a_0$

$n = 3 \to \; a_5 = -\frac{2}{4}a_3 = 0$

$n = 4 \to > a_6 = -\frac{3}{5}a_4 = \frac{1}{5}a_0$

$n = 5 \to \; a_7 = -\frac{4}{6}a_5 = 0$

On remarque que tous les termes à indices impairs sont nuls sauf a_1. Par conséquent, en écrivant la relation de récurrence séparément pour les indices ($n = 2m+1$) impairs et les indices ($n = 2\,m$) pairs, on obtient

$$a_{2m} = (-1)^{m+1}\frac{1}{2m-1}a_0 \quad , \; m \geq 1$$
$$a_{2m+1} = a_1 \;\; , \; m = 0$$

8. La solution générale de l'équation peut donc être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x^{2(0)+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} x^{2m} \\ &= a_0 + a_1 x + a_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^{2\,m}}{2\,m-1} \end{aligned}$$

Example 5.2.3 : Trouver une solution en série à une équation à coefficients variables

Trouver les six premiers termes dans la solution en série du problème de valeur initiale

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3$$

Afficher/Masquer la solution

L'exemple de la section 5.2.2 a donné la solution en série de puissances de cette équation différentielle.

$$= a_0 + a_1 x + a_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^{2\,m}}{2\,m-1}$$

Pour appliquer les conditions initiales, on reconnaît d'abord que $a_0 = y(0) = 2$ et $a_1 = y'(0) = 3$. Ensuite, on remplace a_0 et a_1 dans la solution générale afin de calculer les autres termes.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 3 \\ m = 1 \rightarrow a_2 &= a_0 \left[(-1)^{1+1} \frac{x^{2(1)}}{2(1)-1} \right] \rightarrow a_2 = 2x^2 \\ a_3 &= 0 \\ m = 2 \rightarrow a_4 &= a_0 \left[(-1)^{2+1} \frac{x^{2(2)}}{2(2)-1} \right] \rightarrow a_4 = -\frac{2}{3}x^4 \\ a_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$m = 3 \;\rightarrow\; a_6 = a_0\left[(-1)^{3+1}\frac{x^{2(3)}}{2(3)-1}\right] \;\rightarrow\; a_6 = \frac{2}{5}x^6$$
$$a_7 = 0$$
$$m = 4 \;\rightarrow\; a_8 = a_0\left[(-1)^{4+1}\frac{x^{2(4)}}{2(4)-1}\right] \;\rightarrow\; a_8 = -\frac{2}{7}x^8$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$y(x) = 2 + 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{5}x^6 - \frac{2}{7}x^8 + \dots .$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=236

Section 5.2 Exercices

1. Trouve les six premiers termes dans la solution en série du problème de valeur initiale

$$(1 + x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0,\;\; y(0) = 3,\;\; y'(0) = 2$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y = 3 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \dots$$

2. Trouve les six premiers termes dans la solution en série du problème de valeur initiale

$$y'' - 2xy' + y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 3$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y = 4 + 3x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \ldots$$

3. Trouve les six premiers termes dans la solution en série du problème de valeur initiale

$$(2 + x)y'' + (1 - 4x)y' + (2 + 5x)y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y = 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{73}{96}x^4 + \ldots$$

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLE

Description du chapitre

Ce chapitre présente la méthode matricielle, permettant de résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre. Ces systèmes permettent de modéliser des scénarios comportant de multiples processus interdépendants, ce qui est courant dans les situations complexes du monde réel.

6.1 Étude des matrices : cette section donne un aperçu concis des grands concepts de la théorie des matrices en algèbre linéaire, fondamentaux pour aborder les systèmes d'équations différentielles.

6.2 Indépendance linéaire et systèmes d'équations : cette section passe en revue les systèmes d'équations linéaires et les méthodes permettant d'évaluer l'indépendance linéaire des ensembles de solutions.

6.3 Révision : valeurs propres et vecteurs propres : cette section revient sur les valeurs propres et les vecteurs propres, en expliquant leur calcul et leur importance dans la résolution des systèmes d'équations différentielles.

6.4 Systèmes linéaires d'équations différentielles : cette section présente les systèmes d'équations différentielles du premier ordre et leurs représentations matricielles, en traitant de l'existence de solutions. Il explore également la transformation d'équations différentielles de degré supérieur en formes de systèmes du premier ordre.

6.5 Solutions de systèmes homogènes : cette section détaille les méthodes de recherche de solutions pour les systèmes d'équations différentielles homogènes et se sert du wronskien pour vérifier l'indépendance des solutions.

6.6 Systèmes homogènes à coefficients constants : valeurs propres réelles : cette section poursuit l'exploration des systèmes homogènes d'équations différentielles à coefficients constants, en se concentrant sur les scénarios avec des valeurs propres en nombres réels.

6.7 Systèmes homogènes à coefficients constants : valeurs propres complexes : cette section traite de la résolution de systèmes homogènes à coefficients constants lorsque les valeurs propres sont des nombres complexes.

6.8 Systèmes homogènes à coefficients constants : valeurs propres répétées : cette section traite de la résolution de systèmes homogènes à coefficients constants lorsque les valeurs propres sont des nombres réels répétés.

6.9 Systèmes linéaires non homogènes : cette section étudie les systèmes linéaires non homogènes, en se concentrant sur la méthode de variation des paramètres.

Pionniers du progrès

Evelyn Boyd Granville, née en 1924 à Washington, D.C., est une mathématicienne pionnière dont le parcours témoigne de la résilience et du talent face aux barrières raciales et sexistes. Evelyn Granville, l'une des premières Afro-Américaines à obtenir un doctorat en mathématiques à l'université de Yale en 1949, a commencé par travailler sur l'analyse fonctionnelle, posant ainsi les fondations d'une carrière diversifiée et marquante. Elle a joué un rôle essentiel dans la course à l'espace des États-Unis, en travaillant avec IBM sur les programmes spatiaux Project Vanguard et Project Mercury, où elle a développé des algorithmes informatiques complexes pour l'analyse des trajectoires. Ces travaux s'appuyaient notamment sur les systèmes d'équations différentielles pour calculer les orbites et prédire les trajectoires des engins spatiaux – une composante stratégique de la réussite de ces premières missions spatiales.

Les contributions de Granville ont largement dépassé le cadre de l'exploration spatiale. Elle était également une pédagogue passionnée et une grande défenseure des femmes et des minorités dans les domaines des STIM. Tout au long de sa carrière, elle a enseigné les mathématiques dans diverses universités et a incité d'innombrables étudiantes à poursuivre des carrières scientifiques et technologiques.

6.1 RÉVISION : MATRICES

L'algèbre linéaire, en particulier l'étude des matrices, est indispensable pour comprendre et résoudre des systèmes d'équations différentielles. Cette section donne un aperçu ciblé des concepts clés de la théorie des matrices.

A. Définition de la matrice et notation

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres, de symboles ou d'expressions, disposés en lignes et en colonnes. Les éléments individuels d'une matrice sont appelés éléments ou entrées. Une matrice est généralement désignée par une lettre majuscule (par exemple, A, B, C). L'élément figurant à la ligne i et la colonne j de la matrice A est noté a_{ij}. Les dimensions d'une matrice sont données en lignes x colonnes . Par exemple, une matrice A avec m lignes et n colonnes est une matrice $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

B. Matrices spéciales

Une **matrice ligne** a une seule ligne et plusieurs colonnes, tandis qu'une **matrice colonne** a une seule colonne et plusieurs lignes Elles sont également dénommées **vecteurs ligne** et **vecteurs colonne**, respectivement.

$$x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n} \qquad y = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Une matrice comportant le même nombre de lignes et de colonnes est une **matrice carrée**. Par exemple, la matrice B est une matrice carrée $n \times n$.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Dans une **matrice diagonale**, les éléments en dehors de la diagonale principale sont tous nuls. La diagonale principale est l'ensemble d'éléments a_{ij} où $i = j$. Par exemple, la matrice C est une matrice diagonale $n \times n$
.

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

La **matrice identité** est un type particulier de matrice diagonale, où tous les éléments de la diagonale principale sont des 1. Elle est notée I ou I_n pour indiquer sa taille ($n \times n$).

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

La **matrice nulle** est une matrice dont tous les éléments sont nuls. Elle est notée $0_{m \times n}$ pour indiquer ses dimensions.

$$0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

C. Opérations matricielles

Addition et soustraction de matrices

L'addition et la soustraction de matrices sont des opérations élémentaires qui consistent à additionner ou soustraire des matrices de mêmes dimensions, élément par élément. Si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont des matrices de même taille, leur somme $C = A + B$ est une matrice dont chaque élément $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ces opérations sont commutatives (c'est-à-dire $A + B = B + A$) et associatives (c'est-à-dire $(A + B) + C = A + (B + C)$).

Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire consiste à multiplier chaque élément d'une matrice par un scalaire (un nombre constant). Si k est un scalaire et si $A = [a_{ij}]$, alors kA est une matrice dont chaque élément est ka_{ij}

.

La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition ou la soustraction de matrices (c'est-à-dire $k(A+B) = kA + kB$) et associative par rapport à la multiplication de scalaires (c'est-à-dire $k(lA) = (kl)A$).

Exemple 6.1.1 : Soustraction de matrices et multiplication par un scalaire

Trouver la matrice C où $C = 3A - B$ avec les matrices A et B.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

Les matrices A et B sont de la même taille et peuvent donc être soustraites.

$$C = 3A - B$$

$$C = 3\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Il faut d'abord multiplier tous les éléments de la matrice A par 3.

$$= \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

On soustrait ensuite les éléments correspondants.

$$= \begin{bmatrix} -3-2 & 9-(-4) \\ 0-(-2) & 21-5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=240

Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire n'est possible que lorsque le nombre de colonnes dans la première matrice est égal au nombre de lignes dans la deuxième matrice. Prenons deux matrices $A_{m\times n}$ et $B_{n\times p}$. Le produit de ces matrices donne une nouvelle matrice $C_{m\times p}$, où la dimension de C est $m \times p$. Chaque élément de C est calculé en prenant le produit scalaire d'une ligne correspondante dans A et d'une colonne correspondante dans B. Le calcul de chaque élément à la ligne i et la colonne j de C est donné par la formule

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{6.1.1}$$

La multiplication des matrices est associative, ce qui signifie que $(AB)C = A(BC)$. Elle est aussi distributive sur l'addition, ce qui implique que $A(B+C) = AB + AC$. Cependant, elle n'est pas commutative, de sorte que AB n'est pas nécessairement égal à BA.

Les cas particuliers de la multiplication de matrices comprennent les interactions avec les matrices identité et les matrices nulles. La multiplication de n'importe quelle matrice par une matrice identité de taille appropriée laisse la matrice inchangée (c'est-à-dire $AI = IA = A$). N'importe quelle matrice multipliée par une matrice nulle donne une matrice nulle de dimensions appropriées.

Exemple 6.1.2 : Multiplication de matrices

Calculer la matrice $C = AB$ sachant que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Afficher/Masquer la solution

Pour calculer le produit des matrices A et BT, AB, il faut d'abord s'assurer que la multiplication est possible. La matrice A a les dimensions 2×3, et la matrice B les dimensions 3×4. Comme le nombre de colonnes dans A (3) est égal au nombre de lignes dans B (3), la multiplication peut être effectuée. La matrice C ainsi obtenue aura les dimensions 2×4.

On calcule chaque élément de la matrice C au moyen de l'équation 6.1.1 :

$$c_{11} = (1)(-7) + (4)(-5) + (-1)(0) = -27$$
$$c_{12} = (1)(3) + (4)(1) + (-1)(-2) = 9$$
$$c_{13} = (1)(-1) + (4)(4) + (-1)(1) = 14$$
$$c_{14} = (1)(0) + (4)(3) + (-1)(2) = 10$$
$$c_{21} = (2)(-7) + (0)(-5) + (-5)(0) = -14$$
$$c_{22} = (2)(3) + (0)(1) + (-5)(-2) = 16$$
$$c_{23} = (2)(-1) + (0)(4) + (-5)(1) = -7$$
$$c_{24} = (2)(0) + (0)(3) + (-5)(2) = -10$$

La matrice C obtenue est donc

$$C = \begin{bmatrix} -27 & 9 & 14 & 10 \\ -14 & 16 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=240

D. Déterminant de matrice

Le déterminant est une valeur scalaire associée à chaque matrice carrée. Il fournit des informations essentielles sur la matrice, telles que son inversibilité. Le déterminant d'une matrice A est noté comme suit

$$\det(A) = |A|$$

Pour une matrice 2×2, le déterminant est calculé comme suit :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{6.1.2}$$

Pour les matrices carrées plus grandes, le déterminant est généralement calculé à l'aide de la méthode d'expansion en cofacteurs. Par exemple, le déterminant d'une matrice 3×3 peut être calculé en pratiquant une expansion selon n'importe quelle ligne ou colonne. Pour l'expansion selon la première ligne, la formule est

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{6.1.3}$$

Une autre approche du calcul des déterminants, notamment pour les grandes matrices, consiste à utiliser la réduction des lignes pour transformer la matrice en une forme triangulaire supérieure. Le déterminant est alors le produit des éléments diagonaux.

Exemple 6.1.3 : Trouver le déterminant

Trouver le déterminant des matrices données.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

Pour trouver le déterminant de la matrice A, on utilise la formule présentée à la section 6.1.2.

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-5)(2) - (3)(-1) = -7$$

Pour trouver le déterminant de la matrice B, on utilise la formule présentée à la section 6.1.3.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2((-3)(3) - (-1)(8)) - 4((5)(3) - (0)(8)) + 7((5)(-1) - (0)(-3))$$

$$= 2(-1) - 4(15) + 7(-5)$$

$$= -97$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=240

E. Inverse de matrice

L'inverse d'une matrice carrée A, noté A^{-1}, est une matrice qui, lorsqu'elle est multipliée par Adonne la matrice identité.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Une méthode courante pour trouver un inverse de matrice consiste à utiliser l'adjointe et le déterminant. La formule est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

où $\mathrm{adj}(A)$ est l'adjointe de A, calculée à partir des cofacteurs de A. Cette méthode consiste à calculer le déterminant puis la matrice cofacteur, qui est ensuite transposée pour obtenir la matrice adjointe. Pour une matrice 2×2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, l'inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{6.1.4}$$

Une autre méthode pour trouver l'inverse est la réduction de ligne, qui suppose d'augmenter la matrice A avec la matrice identité

$$[A \mid I]$$

puis à effectuer des opérations sur les lignes pour transformer A en matrice identité. Les opérations permettant de transformer A en I transforment la matrice identité augmentée en A^{-1}.

$$\left[I \mid A^{-1}\right]$$

Cette méthode est particulièrement utile pour les calculs numériques et les matrices plus grandes.

Si une matrice est inversible, son inverse est unique. Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est **non singulière**, c'est-à-dire que son déterminant n'est pas nul. Si le déterminant d'une matrice est nul, la matrice n'a pas d'inverse et est alors dite **singulière**.

Exemple 6.1.4 : Trouver l'inverse d'une matrice 2 par 2

Trouver l'inverse de la matrice A, si tant est qu'il existe.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

Il faut d'abord trouver le déterminant de A pour déterminer si elle a un inverse.

$$|A| = (4)(6) - (2)(6) = 12$$

Le déterminant n'étant pas nul, il existe un inverse. Pour une matrice 2×2, l'approche des cofacteurs, la formule de la section 6.1.4, est plutôt simple.

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=240

Exemple 6.1.5 : Trouver l'inverse d'une matrice 3 par 3

Trouver l'inverse de la matrice A, si tant est qu'il existe.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

Pour trouver l'inverse d'une matrice 3×3, la méthode de la réduction de ligne est la plus directe. Pour trouver l'inverse de la matrice A par la méthode de réduction de ligne, on commence par former une matrice augmentée avec la matrice A et la matrice identité $3 \times 3 I_3$. Le but est d'effectuer des opérations sur les lignes pour transformer le côté gauche de la matrice augmentée (les trois premières colonnes) en matrice identité.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Effectuer l'opération de ligne :

$R2 = R2 + 3R1$ (Ajouter 3 fois la première ligne à la deuxième ligne) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R3 = R3 - 2R2$ (Soustraire 2 fois la deuxième ligne de la troisième ligne) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$R1 = R1 - 3R3$ (Soustraire 3 fois la troisième ligne de la première ligne) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Puisqu'on a réussi à transformer le côté gauche de la matrice augmentée en matrice identité, l'inverse de la matrice A existe et est donné par le côté droit de la matrice augmentée :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 19 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=240

F. Calcul matriciel

La différentiation et l'intégration des matrices sont importantes dans le contexte des systèmes d'équations différentielles linéaires, en particulier pour trouver la solution de systèmes non homogènes.

Différenciation matricielle

La différenciation d'une matrice dont les éléments sont des fonctions implique de prendre la dérivée de chaque élément de la matrice individuellement. Considérons la matrice $A(t)$ dont les éléments sont une fonction de t.

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

La dérivée de $A(t)$ par rapport à t, notée $A'(t)$ ou $\frac{dA}{dt}$, est une matrice de la même taille dont chaque élément est la dérivée de l'élément correspondant de $A(t)$.

$$A'(t) = \begin{bmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1}(t) & a'_{m2}(t) & \dots & a'_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

Les règles standard de différenciation, y compris la règle du produit, la règle du quotient et la règle de la chaîne, s'appliquent à chaque élément de la matrice.

Intégration matricielle

L'intégration d'une matrice avec des éléments qui ont des fonctions est similaire à la différenciation et se fait par éléments. L'intégrale d'une matrice $A(t)$ sur une variable t est une matrice de la même taille dont chaque élément est l'intégrale de l'élément correspondant de $A(t)$.

$$\int A(t)dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)dt & \dots & \int a_{1n}(t)dt \\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)dt & \dots & \int a_{2n}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{m1}(t)dt & \int a_{m2}(t)dt & \dots & \int a_{mn}(t)dt \end{bmatrix}$$

Exemple 6.1.6 : Intégration matricielle

Évaluer l'intégrale de la matrice $A(t)$ par rapport à t.

$$A(t) = \begin{bmatrix} 4e^{4t} & 3te^{-t^2} \\ t^2\cos(-3t^3) & -5t^7 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

L'intégrale de matrices est une opération qui s'effectue par éléments.

$$\int A(t)dt = \left[\int A_{ij}(t)dt\right]$$
$$= \begin{bmatrix} \int 4e^{4t}\,dt & \int 3te^{-t^2}\,dt \\ \int t^2\cos(-3t^3)dt & \int -5t^7\,dt \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{4t} & -\frac{3}{2}e^{-t^2} \\ -\frac{1}{9}\sin(-3t^3) & -\frac{5}{8}t^8 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=240

Section 6.1 Exercices

1. Étant donné que $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, trouve la matrice $C = 2A - 4B$.

   Afficher/Masquer la réponse

   $$C = \begin{bmatrix} 16 & -6 & 22 \\ 18 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

2. Trouve l'inverse de $A = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 21 & -8 \end{bmatrix}$.

   Afficher/Masquer la réponse

   $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -21 & -8 \end{bmatrix}$$

3. Trouve l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

   Afficher/Masquer la réponse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Étant donné les matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, trouve leur multiplication AB.

Afficher/Masquer la réponse

$$AB = \begin{bmatrix} -30 & -15 \\ -12 & -18 \end{bmatrix}$$

5. Étant donné la matrice

$$A(t) = \begin{bmatrix} -2e^{4t} & 3te^{-3t^2} \\ -5t\sin(4t^2) & -7t^{-5} \end{bmatrix}$$

Évaluer l'intégrale de A par rapport à t.

Afficher/Masquer la réponse

$$\int A dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{4t} & -\frac{1}{2}e^{-3t^2} \\ \frac{5}{8}\cos(4t^2) & \frac{7}{4}t^{-4} \end{bmatrix}$$

6.2 RÉVISION : INDÉPENDANCE LINÉAIRE ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

A. Résolution de systèmes d'équations linéaires

La résolution de systèmes d'équations linéaires est un aspect fondamental de l'algèbre linéaire. Pour résoudre efficacement ces systèmes, on les exprime souvent sous forme matricielle. Prenons un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots \\ \quad \dots \\ \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ce système peut être représenté sous cette forme matricielle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

qui est simplement transcrite

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ici, A est la matrice coefficient comportant les coefficients des variables du système, $\mathbf{x}$ est le vecteur (matrice colonne) représentant les variables et $\mathbf{b}$ est le vecteur (matrice colonne) représentant les constantes du côté droit de chaque équation. Si tous les termes constants du vecteur $\mathbf{b}$ sont nuls, alors le système d'équations linéaires constitue un système **homogène**. À l'inverse, si une quelconque constante de $\mathbf{b}$ n'est pas nulle, le système est **non homogène**.

Pour simplifier ce système, on peut utiliser une matrice augmentée, qui combine la matrice coefficient A et le vecteur constant $\mathbf{b}$ en une seule et même matrice. Il suffit pour ce faire d'ajouter $\mathbf{b}$ en colonne supplémentaire à A.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

On effectue ensuite des opérations de ligne afin de simplifier systématiquement cette matrice augmentée, en préservant l'équivalence du système. Le but est d'obtenir soit une forme échelonnée en lignes (FEL) ou une forme échelonnée réduite en lignes (FERL). La FEL, obtenue grâce à la méthode d'élimination de Gauss, simplifie la matrice en une forme triangulaire supérieure où toutes les lignes non nulles sont situées au-dessus des lignes de tous les zéros et où chaque coefficient principal (premier nombre non nul dans une ligne) est à droite du coefficient principal de la ligne du dessus. La FERL, obtenue grâce à la méthode d'élimination de Gauss-Jordan, simplifie encore la FEL de sorte que chaque coefficient principal est le seul nombre non nul de sa colonne et est égal à 1, ce qui facilite la lecture des solutions directement à partir de la matrice.

Solutions possibles

La solution du système dépend de la forme finale de la matrice augmentée après application des opérations de ligne :

- **Solution unique :** Si la matrice augmentée peut être réduite à une forme échelonnée en lignes où chaque variable a un coefficient principal 1 et s'il n'y a pas d'équations incohérentes (comme $0 = 1$), alors le système est cohérent et a une solution unique.

  Regarder la vidéo : Solution unique

  Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les visualiser en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/equationsdifferentielles/?p=4610#oembed-1

- **Pas de solution :** Si la matrice produit une contradiction (comme $0 = 1$), alors le système est incohérent et n'a pas de solution.

  Regarder la vidéo : Solutions possibles

  Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les visualiser en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/equationsdifferentielles/?p=4610#oembed-2

- **Solutions infinies :** Si le système a au moins une ligne où tous les coefficients sont nuls, mais que le système est cohérent (comme $0 = 0$), alors le système à un nombre infini de solutions. En ce cas, la solution est généralement exprimée sous forme paramétrique. Ce cas se présente normalement lorsqu'il y a moins d'équations indépendantes que de variables.

Regarder la vidéo : Solutions infinies

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les visualiser en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/equationsdifferentielles/?p=4610#oembed-3

B. Indépendance linéaire

Il est également important de comprendre le concept d'indépendance linéaire pour résoudre des systèmes d'équations linéaires et d'équations différentielles. Il permet de déterminer si un ensemble de solutions constitue une base valide pour l'espace des solutions et si les solutions sont uniques et couvrent l'ensemble de l'espace des solutions.

Un ensemble de vecteurs dans un espace vectoriel est dit linéairement indépendant si aucun vecteur de l'ensemble ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des autres. Considérons un ensemble de vecteurs

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$$

Les vecteurs sont **linéairement indépendants** si la seule solution à l'équation

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

est $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des constantes. Autrement dit, aucun des vecteurs ne peut être exprimé sous forme de combinaison linéaire des autres vecteurs. S'il existe au moins une solution non triviale (où tous les c_i ne sont pas nuls) à cette équation, alors les vecteurs sont **linéairement dépendants**. Autrement dit, un des vecteurs au moins de l'ensemble peut être écrit comme une combinaison linéaire des autres segments.

Pour vérifier l'indépendance ou la dépendance linéaire, on peut représenter ce système sous cette forme matricielle

$$V\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

où V est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs de l'ensemble.

Test d'indépendance linéaire

- **Au moyen d'une matrice** : former une matrice V avec ces vecteurs comme colonnes. L'ensemble de vecteurs est linéairement indépendant si le déterminant de V n'est pas nul. Si le déterminant est nul, les vecteurs sont linéairement dépendants.

- **Réduction en lignes** : réduire les lignes pour donner à la matrice V une forme échelonnée en lignes (FEL) ou une forme échelonnée réduite en lignes (FERL). Si une colonne dans V n'a pas de coefficient principal 1 (pivot), les vecteurs sont linéairement dépendants.

Si les vecteurs sont ainsi linéairement dépendants, la relation spécifique entre eux peut être déterminée en résolvant le système $V\mathbf{c} = \mathbf{0}$ pour les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Exemple 6.2.1 : Déterminer l'indépendance linéaire

Déterminer si l'ensemble de vecteurs donné est linéairement indépendant ou dépendant. En cas de dépendance linéaire,trouver la relation exacte entre les vecteurs.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

Pour tester l'indépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs, il faut d'abord former une matrice avec ces vecteurs en colonnes, puis déterminer si les déterminants sont non nuls.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 5 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\det(V) = 36$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple 6.2.2 : Déterminer l'indépendance linéaire

Déterminer si l'ensemble de vecteurs donné est linéairement indépendant ou dépendant. S'il est dépendant, trouver la relation exacte entre les vecteurs.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

Pour tester l'indépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs, il faut d'abord former une matrice V avec ces vecteurs en colonnes

$$V = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & -1 & -2 \\ -10 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

En calculant le déterminant de V, on trouve

$$\det(V) = 0$$

Comme le déterminant est nul, les vecteurs sont linéairement dépendants.

Pour trouver la relation entre les vecteurs, on résout le système $V\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

On forme ensuite la matrice augmentée, puis on réduit les lignes pour la simplifier.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & 0 \\ -10 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

En appliquant des opérations de ligne pour donner une forme FERL à la matrice, on obtient

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{34}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La troisième colonne n'a pas de coefficient principal 1 (pivot), ce qui indique que c_3 est une variable libre.

En convertissant la première ligne de la FERL en équation, on obtient

$c_1 + \frac{2}{11}c_3 = 0 \rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $c_1 = -\frac{2}{11}c_3$

En convertissant la deuxième ligne de la FERL en équation, on obtient

$c_2 + \frac{34}{11}c_3 = 0 \rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »> $c_2 = -\frac{34}{11}c_3$

En choisissant $c_3 = 11$ pour simplifier, on trouve

$$c_1 = -\frac{2}{11}(11) = -2$$

$$c_2 = -\frac{34}{11}(11) = -34$$
$$c_3 = 11$$

la relation entre les vecteurs de l'ensemble est donc

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$
$$-2\mathbf{v_1} - 34\mathbf{v_2} + 11\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=242

Section 6.2 Exercices

1. Résous le système d'équations donné.

$$\begin{cases} 3x - y - 4z = 22 \\ -x + 3y + 2z = -6 \\ -4x + 4y - z = -14 \end{cases}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$x = 5,\ y = 1,\ c = -2$$

2. Détermine si l'ensemble de vecteurs donné est linéairement indépendant en formant une matrice V dont les colonnes sont les vecteurs et en calculant le déterminant de V.

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$\det(V) = -14$

Le déterminant n'étant pas nul, les vecteurs sont linéairement indépendants.

3. Détermine si l'ensemble de vecteurs donné est linéairement indépendant en formant une matrice V dont les colonnes sont les vecteurs et en calculant le déterminant de V.

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -18 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$\det(V) = 0$

Comme le déterminant est nul, les vecteurs sont linéairement dépendants.

6.3 RÉVISION : VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Il est essentiel de comprendre les valeurs propres et les vecteurs propres pour résoudre des systèmes d'équations différentielles, en particulier pour trouver les solutions de systèmes homogènes. Cette section passe en revue ces concepts et explique comment les trouver.

A. Définition

Considérons une matrice carrée A de taille $n \times n$ et un vecteur $\mathbf{v}$ avec n éléments. En multipliant la matrice A par le vecteur $\mathbf{v}$, on obtient un nouveau vecteur $\mathbf{u}$ avec n éléments. Géométriquement, cette opération peut être vue comme la transformation du vecteur $\mathbf{v}$ par la matrice A, qui peut impliquer une rotation, une dilatation, une réflexion ou une combinaison de ces éléments, en fonction des propriétés de A. Le vecteur $\mathbf{u}$ ainsi obtenu peut différer en direction et en magnitude du vecteur original $\mathbf{v}$.

Dans de nombreuses applications, on recherche un scalaire spécial λ et un vecteur non nul correspondant $\mathbf{v}$ de façon à ce que, lorsque la matrice A multiplie $\mathbf{v}$, le résultat soit un scalaire multiple de $\mathbf{v}$, et non un nouveau vecteur. La relation est exprimée sous la forme

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{6.3.1}$$

En ce cas, le scalaire λ est appelé **valeur propre**, tandis que le vecteur $\mathbf{v}$ est le **vecteur propre** de la matrice A. Une valeur propre représente donc le facteur par lequel un vecteur propre est dilaté lorsqu'il subit la transformation linaire représentée par A.

Pour trouver les valeurs propres de la matrice A, il faut résoudre l'équation de la section 6.3.1 pour un λ non nul. En réécrivant l'équation, on obtient

$$\begin{gathered} A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ A\mathbf{v} - \lambda I_n\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ (A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{gathered}$$

Ici, I_n est la matrice identité de la même taille que A. Le déterminant de $A - \lambda I_n$ doit être nul pour que ce système ait des solutions non triviales. On définit $c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ comme le**polynôme caractéristique** de la matrice A. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres, ce qui peut être exprimé sous la forme

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{6.3.2}$$

Une fois les valeurs propres déterminées, les vecteurs propres correspondants sont obtenus en résolvant le système $(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pour chaque valeur propre λ. Ces vecteurs ne sont pas uniques, car tout multiple scalaire d'un vecteur propre est aussi un vecteur propre valide.

B. Propriétés des valeurs propres et vecteurs propres

- **Multiplicité algébrique** : renvoie au nombre de fois où une valeur propre apparaît comme racine dans le polynôme caractéristique d'une matrice. Permet de savoir combien de fois une valeur propre est répétée.

- **Multiplicité géométrique** : indique le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à une valeur propre. La multiplicité géométrique est toujours inférieure ou égale à la multiplicité algébrique.
- **Indépendance linéaire des vecteurs propres** : les vecteurs propres correspondant à différentes valeurs propres d'une matrice sont linéairement indépendants. Il s'agit d'une propriété essentielle qui permet de former une base dans l'espace vectoriel couvert par ces vecteurs propres. Si les multiplicités algébrique et géométrique d'une valeur propre sont égales, alors il existe un ensemble complet de vecteurs propres linéairement indépendants pour cette valeur propre.
- **Valeurs et vecteurs propres conjugués complexes :** dans les systèmes qui ont des valeurs propres complexes, ces valeurs propres et leurs vecteurs propres correspondants apparaissent par paires conjuguées. Cela signifie que, si λ est une valeur propre complexe avec un vecteur propre associé $\mathbf{v}$, alors $\bar{\lambda}$ (le conjugué complexe de λ) est aussi une valeur propre, avec pour vecteur propre correspondant $\bar{\mathbf{v}}$ (le conjugué complexe de $\mathbf{v}$).
- **Diagonalisation :** une matrice est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre, la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique. Cela signifie qu'il y a suffisamment de vecteurs propres linéairement indépendants pour former une base pour l'espace. Si une matrice n'est pas diagonalisable, elle est appelée matrice défectueuse.

Exemple 6.3.1 : Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres – Valeurs propres réelles

Pour la matrice donnée, **a)** trouver le polynôme caractéristique de la matrice et **b)** toutes les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

a.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 1) - 5$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

b) Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -2$, sont les valeurs propres de A. Pour trouver les vecteurs propres correspondants, il faut trouver la solution du système $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ pour chaque valeur propre.

Pour $\lambda_1 = 4$, on a

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 5 \\ 1 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3-4 & 5 \\ 1 & -1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R2+R1}) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La deuxième colonne n'a pas de pivot 1, donc u_2 est une variable libre. On représente généralement la variable libre par un paramètre, par exemple t. On écrit alors u_1 et u_2 en fonction du paramètre t.

$$u_1 - 5u_2 = 0 \rightarrow u_1 = 5t$$
$$u_2 = t$$

Ainsi, la solution générale est $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, où t est un nombre réel non nul arbitraire.

On recherche généralement un vecteur propre basique (sans paramètre). On peut choisir une valeur pour t pour trouver un vecteur propre basique. En utilisant $t = 1$, le vecteur propre correspondant à $\lambda_1 = 4$ est $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = -2$, on a

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 5 \\ 1 & -1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+2 & 5 \\ 1 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Là encore, pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

La solution générale est

$$\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où t est un nombre réel non nul arbitraire. En utilisant $t = 1$, le vecteur propre basique correspondant à $\lambda_2 = -2$ est $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Les deux valeurs propres sont des valeurs propres simples avec une multiplicité algébrique de 1 et, par conséquent, leurs vecteurs propres sont linéairement indépendants.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=244

Exemple 6.3.2 : Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres – Valeurs propres complexes

Pour la matrice donnée, **a)** trouver le polynôme caractéristique de la matrice et **b)** toutes les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

a.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7-\lambda & -1 \\ 5 & -9-\lambda \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} -7-\lambda & -1 \\ 5 & -9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7+\lambda)(9+\lambda) + 5$$

$$= \lambda^2 + 16\lambda + 68$$

En complétant le carré, on obtient

$$= (\lambda + 8)^2 + 4$$

b) Les racines de $c_A(\lambda)$ sont les valeurs propres de A.

$$(\lambda + 8)^2 + 4 = 0$$

$$(\lambda + 8)^2 = -4$$

$$\lambda + 8 = \pm 2i$$

$$\lambda = -8 \pm 2i$$

Ensuite, pour trouver les vecteurs propres correspondants, on suit les mêmes étapes que dans l'exemple précédent, en résolvant le système $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Cependant, comme les valeurs propres sont des conjugués complexes, leurs vecteurs propres correspondants seront aussi des conjugués. Par conséquent, on doit seulement trouver le vecteur propre associé à l'une des valeurs propres.

On trouve le vecteur propre associé à $\lambda_1 = -8 - 2i$.

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -7 - (-8 - 2i) & -1 \\ 5 & -9 - (-8 - 2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + 2i & -1 \\ 5 & -1 + 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 + 2i & -1 & 0 \\ 5 & -1 + 2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1-2i)R1}) \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -1 + 2i & 0 \\ 5 & -1 + 2i & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R2-R1}\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R1}) » \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La deuxième colonne n'a pas de pivot 1, donc u_2 est une variable libre. On représente généralement la variable libre par un paramètre t. On écrit alors u_1 et u_2 en fonction du paramètre t.

$$u_1 + \left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)u_2 = 0 \xrightarrow{u_2=t})u_1 = \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)t$$

$$u_2 = t$$

Donc, les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = -8-2i$ sont
$\mathbf{u_1} = t\begin{bmatrix} \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. Avec $t = 5$, on a

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur propre correspondant à la valeur propre conjuguée est le conjugué du vecteur propre $\mathbf{u_1}$. Ainsi, le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -8+2i$ est

$$\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les deux valeurs propres sont des valeurs propres simples avec une multiplicité algébrique de 1 et, par conséquent, leurs vecteurs propres sont linéairement indépendants.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=244

Exemple 6.3.3 : Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres – Valeurs propres réelles répétées

Pour la matrice donnée, **a)** trouver le polynôme caractéristique de la matrice et **b)** toutes les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

a.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 6 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \ -\lambda\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0\\ 3 & -3-\lambda\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}6 & -2\\ -2-\lambda & 0\end{vmatrix}$$

$$= \ -\lambda(-2-\lambda)(-3-\lambda)-(-2-\lambda)(-2)$$

$$=(-2-\lambda)\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)$$

$$= \ -(\lambda+2)^2(\lambda+1)$$

b)

Les racines de $c_A(\lambda)$, $\lambda_{1,2} \ = \ -2$, avec une multiplicité de 2, et $\lambda_3 \ = \ -1$, avec une multiplicité de 1, sont les valeurs propres de A.

Pour trouver les vecteurs propres correspondants, il faut trouver la solution du système $(A-\lambda I)\mathbf{u}=\mathbf{0}$ pour chaque valeur propre, comme dans l'exemple précédent.

Pour $\lambda_{1,2} \ = \ -2$, on a

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 6 & -2\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 1 & 3 & -3-\lambda\end{vmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2 & 6 & -2\\ 0 & -2+2 & 0\\ 1 & 3 & -3+2\end{vmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\begin{vmatrix}2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}\xrightarrow{R2\leftrightarrow R3})\begin{vmatrix}2 & 6 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R1\leftrightarrow R2}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \xrightarrow{R2-2R1}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

Les deuxième et troisième colonnes n'ayant pas de pivot 1, u_2 et u_3 sont des variables libres. On fait en sorte que u_2 et u_3 soient représentés par les paramètres s et t, respectivement. On écrit alors u_1 en fonction de ces paramètres.

$$u_1 + 3s - t = 0 \rightarrow u_1 = -3s + t$$

$$u_2 = s$$

$$u_3 = t$$

Le vecteur propre $\mathbf{u_{1,2}}$ peut donc être exprimé sous la forme

$$\mathbf{u_{1,2}} = \begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3s+t\\ s\\ t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \quad s, t \neq 0 \text{ en même temps}$$

où s et t ne peuvent pas être nuls en même temps, car cela donnerait un vecteur nul et les vecteurs propres ne sont jamais nuls. L'espace propre est traversé par deux vecteurs $\left\{\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$.

Les vecteurs propres basiques associés à la valeur propre $\lambda_{1,2}$ sont donc $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ et

$\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_3 = -1$, on a

$$\begin{vmatrix}1 & 6 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Là encore, pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix}\right| \xrightarrow{R3-R1}) \left|\begin{matrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{matrix}\right|$$

$$\xrightarrow{-R2} \left|\begin{matrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{R3+3R2}) \left|\begin{matrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{R1-6R2} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

La troisième colonne n'a pas de pivot 1, donc u_3 est une variable libre. On représente généralement la variable libre par un paramètre t. On écrit alors u_1 et u_2 en fonction du paramètre t.

$$u_1 - 2t = 0 \rightarrow u_1 = 2t$$

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = t$$

Le vecteur propre $\mathbf{u_3}$ peut ainsi être exprimé sous la forme

$$\mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \neq 0$$

En utilisant $t = 1$, le vecteur propre correspondant à $\lambda_3 = -1$ est $\mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pour les deux valeurs propres, la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique et leurs vecteurs propres sont donc linéairement indépendants.

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=244

Section 6.3 Exercices

1. Trouve les valeurs propres de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Afficher/Masquer la réponse

$\lambda_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{11}$

2. Trouve les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ -4 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Afficher/Masquer la réponse

$\lambda_1 = 1, \ \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou n'importe quel multiple scalaire.

$\lambda_{2,3} = 3, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou n'importe quel multiple scalaire.

3. Trouve les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$.

Afficher/Masquer la réponse

$\lambda_1 = 3, \ \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ou n'importe quel multiple scalaire.

$\lambda_2 = 2, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ ou n'importe quel multiple scalaire.

6.4 SYSTÈMES LINÉAIRES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

A. Introduction

Après avoir exploré les équations différentielles du premier ordre et du second ordre, intéressons-nous maintenant aux systèmes d'équations différentielles. Ces systèmes permettent de modéliser des scénarios comportant de multiples processus interdépendants, ce qui est courant dans les situations complexes du monde réel.

Par exemple, dans un écosystème où interagissent des espèces comme les proies et les prédateurs, le taux de variation de la population de chaque espèce dépend non seulement de sa taille, mais aussi des populations d'autres espèces. Cette interaction conduit à un système d'équations différentielles, où chaque équation représente le taux de croissance d'une espèce, incarnant leurs interrelations. De même, dans les problèmes de mélanges avec des réservoirs interconnectés, la concentration dans un réservoir affecte et est affectée par les concentrations dans les réservoirs connectés. Dans les systèmes mécaniques, tels qu'un système masse-ressort à multiples masses et ressorts, le déplacement de chaque masse est influencé par ses voisines, formant un système d'équations différentielles interconnectées.

B. Systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre

Cette section présente la méthode matricielle pour résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre. Ces systèmes sont caractérisés par le fait que chaque équation est du premier ordre et linéaire. Ils peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases}$$

La notation matricielle simplifie la caractérisation et la résolution de ces systèmes, de la même manière que les systèmes d'équations algébriques. Un système linéaire du premier ordre peut être exprimé sous forme de matrice comme suit :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Dans la notation vectorielle, le système est écrit comme suit :

$$\mathbf{y}\prime = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{6.4.1}$$

Ici, la matrice $A(t)$ est la matrice coefficient et $\mathbf{f}$ est la fonction vectorielle de forçage. $A(t)$ et $\mathbf{f}$ sont continues si leurs éléments sont continus. Si $\mathbf{f(t)} = 0$ dans l'équation de la section 6.4.1, le système est homogène, sinon, il est non homogène.

Un problème de valeur initiale suppose de trouver une solution pour

$$\mathbf{y}\prime = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k} \tag{6.4.2}$$

où $\vec{k}$ est un vecteur constant représentant la condition initiale.

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Exemple 6.4.1 : Écrire un système d'équations différentielles sous forme matricielle

Écrire le système d'équations différentielles donné sous forme matricielle.

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 - 3e^{2t} \\ y'_2 = y_1 + y_2 + e^{2t} \end{cases}$$

Afficher/Masquer la solution

Le système peut être écrit sous cette forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Un problème de valeur initiale pour le système peut être écrit comme ceci :

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}, \qquad \mathbf{y}(t_0) = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=247

Théorème d'existence et d'unicité des solutions. Si la matrice coefficient $A(t)$ et la fonction de forçage $\mathbf{f}(t)$ sont continues sur un intervalle ouvert comportant t_0, alors il existe une solution unique au problème de valeur initiale suivant sur cet intervalle.

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k}$$

Exemple 6.4.2 : Vérifier la solution d'un système d'équations différentielles

a) Vérifier que

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}$$

est une solution au système suivant pour n'importe quelles valeurs de c_1 et c_2.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

b) Trouver la solution de la condition initiale

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

a) Si $\mathbf{y}$ est une solution au système, alors $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$.

côté gauche:

$$\mathbf{Ay} = c_1\begin{bmatrix}-4 & -10\\ 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\ 3\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}-4 & -10\\ 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{t}$$

$$= c_1\begin{bmatrix}-10\\ 6\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{t}$$

côté droit:

$$\mathbf{y}' = c_1\begin{bmatrix}-5\\ 3\end{bmatrix}\frac{d}{dt}(e^{2t}) + c_2\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\frac{d}{dt}(e^{t})$$

$$= 2c_1\begin{bmatrix}-5\\ 3\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{t}$$

$$= c_1\begin{bmatrix}-10\\ 6\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{t}$$

côté gauche:côté droit

b) Comme la matrice coefficient est continue pour tous les nombres réels $\mathbb{R}$, le théorème d'existence des solutions garantit pour le problème de valeur initiale une solution unique sur $\mathbb{R}$. Pour trouver les constantes c_1 et c_2, il faut appliquer la condition initiale :

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix}-5\\ 3\end{bmatrix}e^{0} + c_2\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}e^{0} = \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-5c_1 + 2c_2\\ 3c_1 - c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

Cela donne un système de deux équations dans deux variables c_1 et c_2.

$$\begin{cases}-5c_1 + 2c_2 = 1\\ 3c_1 - c_2 = -2\end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve

$$c_1 = -3, \quad c_2 = -7$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{y} = -3\begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}e^{2t} - 7\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}e^{t}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=247

C. Équation différentielle d'ordre*n* sous forme d'un système de *n* équations du premier ordre

Les équations différentielles de degré supérieur peuvent être transformées en systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Cette conversion permet d'analyser des problèmes complexes d'ordre supérieur à l'aide de techniques et d'outils développés pour les systèmes du premier ordre. Cette approche est largement utilisée dans les méthodes numériques et l'analyse théorique dans diverses applications scientifiques et techniques. Voici un guide étape par étape de ce processus.

Comment convertir des équations différentielles d'ordre n en un système de n équations du premier ordre

Prenons une équation différentielle linéaire d'ordre n :

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

1. Introduire de nouvelles variables : introduire n nouvelles variables correspondant à la fonction y et à ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$. Soit

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \\ x_3 &= y'' \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

2. Exprimer les dérivées : exprimer les dérivées de ces nouvelles variables en fonction de l'équation différentielle d'origine.

$$\begin{aligned} x_1' &= y' = x_2 \\ x_2' &= y'' = x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= y^{(n-1)} = x_n \\ x_n' &= y^{(n)} = g(t) - a_{n-1}(t)y^{(n-1)} - \cdots - a_1(t)y' - a_0(t)y \end{aligned}$$

On observe que la dernière équation est l'équation originale réarrangée pour la plus haute dérivée de y. Dans la dernière équation, remplacer les nouvelles variables par y et ses dérivées :

$$x_n' = g(t) - a_{n-1}(t)x_n - \cdots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1$$

3. Écrire le système d'équations du premier ordre : on a maintenant un système de n équations différentielles linéaires du premier ordre :

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= g(t) - a_{n-1}(t)x_n - \cdots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1 \end{aligned}$$

Exemple 6.4.3 : Écrire une équation différentielle du second ordre sous forme de système linéaire du premier ordre

Écrire l'équation différentielle du second ordre donnée sous forme de système d'équations différentielles linéaires du premier ordre

$$3y'' + 2y' - 6y = 2\sin(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

Afficher/Masquer la solution

1. Introduire une nouvelle variable x_i :

$$x_1 = y$$
$$x_2 = y'$$

2. Exprimer les dérivées en différenciant les équations ci-dessus et réarranger l'équation différentielle originale afin d'isoler y'' :

$$x_1{}' = y' = x_2$$
$$x_2{}' = y'' = \frac{2}{3}\sin(t) - \frac{2}{3}y' + 2y \rightarrow$$ » title= »-> » class= »asciimath

mathjax »> $x_2{}' = \frac{2}{3}\sin(t) - \frac{2}{3}x_2 + 2x_1$

On exprime aussi les conditions initiales par rapport aux nouvelles variables :

$$x_1(0) = y(0) = 1$$
$$x_2(0) = y'(0) = -1$$

3. Le système d'équations du premier ordre est donc

$$x_1{}' = x_2$$
$$x_2{}' = 2x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}\sin(t)$$
$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=247

Section 6.4 Exercices

1. Écris le système d'équations différentielles donné sous forme matricielle.

$$\begin{cases} y_1{}' = 2y_1 - 2y_2 - 2t^4 \\ y_2{}' = 6y_1 + 3y_2 + 5t^4 \end{cases}$$

   Afficher/Masquer la réponse

$$\begin{bmatrix} y_1{}' \\ y_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} t^4$$

2. Convertis l'équation différentielle donnée en un système d'équations du premier ordre avec $x = u,\ y = u'$.

$$u'' + 5u' + 2u = 2e^{3t}$$

   Afficher/Masquer la réponse

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -5y - 2x + 2e^{3t} \end{aligned}$$

3. Réécris le système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

   sous la forme d'une équation différentielle du second ordre pour x.

   Afficher/Masquer la réponse

$$x'' - 7x' + 22x = 0$$

6.5 SOLUTIONS DE SYSTÈMES HOMOGÈNES

A. Ensemble fondamental de solutions et wronskien

Commençons par étudier le système linéaire homogène

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{6.5.1}$$

où A est une matrice constante $n \times n$ à éléments réels et $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ est la solution triviale du système. Toute autre solution est une solution non triviale.

Théorème. Si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ sont n solutions linéairement indépendantes au système présenté dans la section 6.5.1 et A est continue sur un intervalle ouvert I, alors l'ensemble $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ est appelé **ensemble fondamental** de solutions au système sur I.

Comme expliqué à la section 6.2 sur l'indépendance linéaire, les vecteurs $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ sont linéairement indépendants si $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n = 0$ n'a pour solution que la solution triviale. Ainsi, si

$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

alors $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

Pour que cette solution soit unique, le déterminant de la matrice du coefficient de l'équation dont les colonnes sont les fonctions vectorielles $\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \ldots & \mathbf{y}_n \end{bmatrix}$ ne doit pas être nul. Le déterminant de la matrice du coefficient de l'équation est appelé **wronskien** et transcrit $W(t)$.

$$W(t) = |\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2\ \ldots\ \mathbf{y}_n|$$

Théorème. Si le wronkien $W(t)$ de $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ n'est pas nul en un point (et donc jamais nul) sur I, alors $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ est linéairement indépendant, formant un ensemble fondamental de solutions pour le système présenté à la section 6.5.1 sur I. La **matrice fondamentale** $Y(t)$ du système est

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \ldots & \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemple 6.5.1 : Calculer le wronskien et trouver la solution générale pour une solution de système donnée

Étant donné que les fonctions vectorielles

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} \text{ et } \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}$$

sont des solutions d'un système à coefficient constant 2×2, **a)** calculer le wronkskien de $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ et **b)** trouver la solution générale du système.

Afficher/Masquer la solution

a.

$$W(t) = |\mathbf{y}_1 \;\; \mathbf{y}_2| = \begin{vmatrix} -2e^{3t} & -2e^{t} \\ 3e^{3t} & -e^{t} \end{vmatrix} = 2e^{4t} + 6e^{4t} = 8e^{4t}$$

b) Comme $W(t) \neq 0$, $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ sont linéairement indépendants, l'ensemble est un ensemble fondamental de solutions au système et la matrice suivante est la matrice fondamentale du système.

$$Y = \begin{bmatrix} -2e^{3t} & -2e^{t} \\ 3e^{3t} & -e^{t} \end{bmatrix}$$

La solution générale est donc

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} = \begin{bmatrix} -2e^{3t} & -2e^{t} \\ 3e^{3t} & -e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=250

B. Solutions de systèmes homogènes à coefficients constants

Pour trouver les solutions de systèmes homogènes à coefficients constants, représentés par le système présenté à la section 6.5.1, on applique une approche similaire à celle utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.

À la section 3.2, on a trouvé une solution non triviale de la forme $y = e^{rt}$ pour une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. La section 6.4 a montré que toute équation différentielle linéaire d'ordre supérieur peut être exprimée comme un système linéaire d'équations différentielles du premier ordre. Par conséquent, il est raisonnable qu'une solution du système indiqué à la section 6.5.1 présente la forme

$$\mathbf{y} = e^{rt}\mathbf{u} \tag{6.5.2}$$

Ici, r est une constante et $\mathbf{u}$ est un vecteur constant. L'étape suivante consiste à remplacer la solution présentée à la section 6.5.2 dans notre système. Ce qui donne

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$
$$re^{rt}\mathbf{u} = Ae^{rt}\mathbf{u}$$

Après avoir annulé le terme exponentiel e^{rt}, on arrive à

$$r\mathbf{u} = A\mathbf{u}$$

En réarrangeant l'équation, on obtient

$$(A - rI)\mathbf{u} = 0$$

C'est l'équation caractéristique utilisée pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A, comme expliqué à la section 6.3. Pour que la solution que nous avons trouvée $\mathbf{y} = e^{rt}\mathbf{u}$ ne soit pas triviale, r et $\mathbf{u}$ doivent correspondre à la valeur propre et au vecteur propre de la matrice A, respectivement.

Ainsi, pour résoudre le système 6.5.1, il faut d'abord trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice coefficient A. La structure de la solution varie selon la nature des valeurs propres, qui peuvent être réelles et distinctes, complexes ou répétées. Chacun de ces scénarios sera exploré dans les sections suivantes.

Section 6.5 Exercices

1. Étant donné que les fonctions vectorielles

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

sont des solutions à un système différentiel à coefficients constants 2×2, calcule le wronskien de $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$. Détermine si les vecteurs sont linéairement indépendants.

Afficher/Masquer la réponse

$W(t) = -23e^{3t}$. Les vecteurs sont linéairement indépendants, car leur wronskien n'est jamais nul pour tout nombre réel t.

2. Étant donné que les fonctions vectorielles

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{4t} \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

sont des solutions à un système différentiel à coefficients constants 2×2, calcule le wronskien de $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$. Détermine si les vecteurs sont linéairement indépendants.

Afficher/Masquer la réponse

$W(t) = -5$. Les vecteurs sont linéairement indépendants, car leur wronskien n'est pas nul.

6.6 SYSTÈMES HOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS : VALEURS PROPRES RÉELLES

À la section 6.5, vous avons vu que les solutions de systèmes homogènes à coefficients constants

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{6.6.1}$$

présentent la forme

$$\mathbf{y} = e^{rt}\mathbf{u}$$

où r est une valeur propre et $\mathbf{u}$est le vecteur propre correspondant de la matrice coefficient A.

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où les valeurs propres d'une matrice A sont distinctes et réelles.

Théorème : si une matrice $n \times n$ A a n valeurs propres réelles et distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et si $\mathbf{u}_i$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, alors les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sont linéairement indépendants.

Dans ce contexte, les solutions de chaque valeur propre prennent la forme $y = e^{\lambda_i t}\mathbf{u}_i$. Collectivement, l'ensemble $\left\{e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n\right\}$ forme un ensemble fondamental de solutions pour le système homogène présenté à la section 6.6.1.

Par conséquent, la solution générale peut être exprimée comme une combinaison linéaire de ces solutions individuelles.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{u}_n \tag{6.6.2}$$

où c_i est une constante arbitraire.

Exemple 6.6.1 : Trouver la solution générale d'un système homogène

Trouver la solution générale de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

Afficher/Masquer la solution

1. Il faut d'abord trouver les valeurs propres de la matrice coefficient A.

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} -6-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 6)(\lambda + 2) + 3$$

$$= \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

$$= (\lambda + 5)(\lambda + 3)$$

Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = -3$, sont les valeurs propres de A.

2. Ensuite, pour trouver les vecteurs propres correspondants, il faut trouver la solution à l'équation $(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ pour chaque valeur propre.

Pour $\lambda_1 = -5$, on a

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -5+6 & 3 \\ -1 & -5+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_1 = -5$ sont $\mathbf{u}_1 = t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$.

En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_1 = -5$ est $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = -3$, on a

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3+6 & 3 \\ -1 & -3+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_2 = -3$ sont $\mathbf{u}_2 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_2 = -3$ est $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Une solution générale du système est donnée par l'équation présentée à la section 6.6.2.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-5t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=253

Exemple 6.6.2 : Résoudre un problème de valeur initiale

Résoudre le système d'équations différentielles avec les valeurs initiales données.

$$\begin{cases} y_1{}' = 4y_1 - 15y_2 \\ y_2{}' = 2y_1 - 7y_2 \end{cases}, \quad y_1(0) = 7, \;\; y_2(0) = 3$$

Afficher/Masquer la solution

1. On exprime d'abord le système dans la notation matricielle.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -15 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Ensuite, on trouve les valeurs propres de A.
Le polynôme caractéristique de la matrice coefficient A est donné par

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -15 \\ 2 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(-7-\lambda) + 30$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$, sont les valeurs propres de A.

3. On trouve ensuite les vecteurs propres correspondants.

Pour $\lambda_1 = -1$, on a

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4+1 & -15 \\ 2 & -7+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -15 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_1 = -1$ sont $\mathbf{u}_1 = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$.

En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_1 = -1$ est $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = -2$, on a

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4+2 & -15 \\ 2 & -7+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -15 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_2 = -2$ sont $\mathbf{u}_2 = t\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$.

En prenant $t = 2$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_2 = -2$ est $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. Une solution générale du système est donnée par l'équation présentée à la section 6.6.2.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. Enfin, on applique les conditions initiales pour trouver les constantes c_1 et c_2.

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 e^0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^0 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3c_1 + 5c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} 3c_1 + 5c_2 = 7 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 2$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{y}(t) = -e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{-2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=253

Exemple 6.6.3 : Résoudre un problème de valeur initiale

Résoudre le système d'équations différentielles avec les valeurs initiales données.

$$\begin{cases} y_1{}' = 3y_1 + 14y_2 - 13y_3 \\ y_2{}' = 11y_2 - 7y_3 \\ y_3{}' = 14y_2 - 10y_3 \end{cases}, \quad y_1(0) = -3,\ y_2(0) = -1,\ y_3(0) = 1$$

Afficher/Masquer la solution

1. On exprime d'abord le système dans la notation matricielle.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 14 & -13 \\ 0 & 11 & -7 \\ 0 & 14 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Il faut d'abord trouver les valeurs propres de la matrice coefficient A.

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 14 & -13 \\ 0 & 11-\lambda & -7 \\ 0 & 14 & -10-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 11-\lambda & -7 \\ 14 & -10-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 12\right) \\ &= (3-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-4) \end{aligned}$$

Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, et $\lambda_3 = -3$, sont les valeurs propres de A.

3. On trouve ensuite les vecteurs propres correspondants.

Pour $\lambda_1 = 3$, on a

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 14 & -13 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 14 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 14 & -13 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & 14 & -13 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_1 = 3$ sont $\mathbf{u}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_1 = 3$ est $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 4$, on a

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 14 & -13 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 14 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\begin{bmatrix} -1 & 14 & -13 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 14 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_2 = 4$ sont $\mathbf{u}_2 = t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_2 = 4$ est $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_3 = -3$, on a

$$(\lambda_3 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix}6 & 14 & -13\\0 & 14 & -7\\0 & 14 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\begin{bmatrix}6 & 14 & -13\\0 & 14 & -7\\0 & 14 & -7\end{bmatrix} \text{-} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_3 = -3$ sont $\mathbf{u}_3 = t\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$.

En prenant $t = 2$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_3 = -3$ est $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$.

4. Une solution générale du système est donnée par l'équation présentée à la section 6.6.2.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

5. Enfin, on applique les conditions initiales pour trouver les constantes c_1, c_2 et c_3.

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un système de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = -3 \\ c_2 + c_3 = -1 \\ c_2 + 2c_3 = 1 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve

$$c_1 = -4, \quad c_2 = -3, \quad c_3 = 2$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{y}(t) = -4e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 3e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=253

À la section 6.4, nous avons vu comment les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur peuvent être converties en systèmes d'équations linéaires du premier ordre. Cette transformation, associée à la méthode matricielle, offre plusieurs avantages, notamment une meilleure organisation du problème et une facilité de calcul. Bien que cette approche ne soit pas toujours plus courte que la méthode du polynôme caractéristique présentée à la section 3.2, en particulier pour résoudre des équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants, il est utile de comprendre ce processus. Pour illustrer son application, prenons un exemple.

Exemple 6.6.4 : Résoudre une équation différentielle du second ordre avec la méthode matricielle

Convertir l'équation différentielle donnée en un système linéaire du premier ordre et trouver la solution.

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = -3, \; y'(0) = -13$$

Afficher/Masquer la solution

a. Convertir l'équation en un système :

1a. Introduire une nouvelle variable x_i :

$$x_1 = y$$
$$x_2 = y'$$

2a. Exprimer les dérivées en différenciant les équations ci-dessus et réarranger l'équation différentielle originale afin d'isoler y'' :

$$x_1' = y' = x_2$$

$x_2' = y'' = -3y' + 10y \rightarrow$ » title= »-> » class= »asciimath mathjax »>

$$x_2' = -3x_2 + 10x_1$$

On exprime aussi les conditions initiales par rapport aux nouvelles variables :

$$x_1(0) = y(0) = -3$$
$$x_2(0) = y'(0) = -13$$

3a. Le système d'équations du premier ordre est donc

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = 10x_1 - 3x_2$$
$$x_1(0) = -3, \; x_2(0) = -13$$

b. Résoudre le système

1b. On exprime le système sous forme matricielle.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

2b. Il faut d'abord trouver les valeurs propres de la matrice coefficient A.

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 10 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)(-3-\lambda) - 10 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 10 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 5) \end{aligned}$$

Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -5$, sont les valeurs propres de A.

3b. On trouve ensuite les vecteurs propres correspondants.

Pour $\lambda_1 = 2$, on a

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_1 = 2$ sont $\mathbf{u}_1 = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. En prenant $t = 2$, un vecteur propre basique est $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = -5$, on a

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_2 = -5$ sont $\mathbf{u}_2 = t\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. En prenant $t = 5$, un vecteur propre basique est $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

4b. Une solution générale du système est donnée par l'équation présentée à la section 6.6.2.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

5b. On applique les conditions initiales pour trouver les constantes c_1 et c_2.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$c_1 e^0\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^0\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ 2c_1 + 5c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = -3 \\ 2c_1 + 5c_2 = -13 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve

$$c_1 = -4, \quad c_2 = -1$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{x}(t) = -4e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - e^{-5t}\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

c. Déterminer la solution de l'équation originale

Étant donné que $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\y'\end{bmatrix}$, on voit que la solution de l'équation différentielle du second ordre d'origine y est la ligne supérieure de la solution du système. La solution de l'équation d'origine est donc

$$y = -4e^{2t} + e^{-5t}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=253

Section 6.6 Exercices

1. Résous le système d'équations différentielles avec les valeurs initiales données.

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - 12y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 \end{cases}, \quad y_1(0) = 4, \;\; y_2(0) = 1$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_1(t) = 6e^{3t} - 2e^{t}$$

$$y_2(t) = 2e^{3t} - e^{t}$$

2. Résous le système d'équations différentielles

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -17 & -30 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-7t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Résous le système d'équations différentielles

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 7 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & -12 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}'(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\mathbf{y}(t) = \; -4e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.7 SYSTÈMES HOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS : VALEURS PROPRES COMPLEXES

Dans cette section, nous examinons les solutions d'un système homogène à coefficients constants $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ dans les situations où les valeurs propres de la matrice coefficient sont complexes. Normalement, ces valeurs propres sont des conjugués les unes des autres, ce qu'on représente par $\lambda = \alpha \pm i\beta$, où i est l'unité imaginaire et α et β sont des nombres réels. Comme dans le cas complexe d'équations différentielles du second ordre, on utilise la formule d'Euler pour convertir des exponentielles complexes en fonctions trigonométriques réelles, en commençant par la forme de solution supposée $y = e^{rt}\mathbf{u}$.

Théorème. Si une matrice $n \times n$ Aa des valeurs propres complexes conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\beta$ avec le vecteur propre correspondant $\mathbf{u} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$, alors deux solutions linéairement indépendantes du système homogène $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ sont

$$\mathbf{y}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos(\beta t) - \mathbf{b}\sin(\beta t))$$
$$\mathbf{y}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin(\beta t) + \mathbf{b}\cos(\beta t))$$

La solution générale du système est donnée par

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$$
$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos(\beta t) - \mathbf{b}\sin(\beta t)) + c_2 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin(\beta t) + \mathbf{b}\cos(\beta t)) \qquad \textbf{(6.7.1)}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

Exemple 6.7.1 : Trouver la solution générale d'un système homogène

Trouver la solution générale de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

Afficher/Masquer la solution

1. Il faut d'abord trouver les valeurs propres de A.

Le polynôme caractéristique de la matrice coefficient A est donné par

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(-1-\lambda) + 18$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

$$= (\lambda - 2)^2 + 9$$

Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda = 2 \pm i3$, sont donc les valeurs propres de A.

2. Ensuite, on trouve les vecteurs propres correspondants en trouvant la solution à l'équation $(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Cependant, on doit seulement trouver le vecteur propre associé à l'une des valeurs propres, par exemple $\lambda_1 = 2 + i3$.

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 5-(2+i3) & 6 \\ -3 & -1-(2+i3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-i3 & 6 \\ -3 & -3-i3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3-i3 & 6 & 0 \\ -3 & -3-i3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 2 + i3$ sont $\mathbf{u}_1 = t\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. En prenant $t = 1$, on a un vecteur propre basique

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La partie réelle de $\mathbf{u}_1$ est $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et la partie imaginaire de $\mathbf{u}_1$ est $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Le vecteur propre correspondant à la valeur propre conjuguée est le conjugué du vecteur propre $\mathbf{u}_1$. Ainsi, le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2 - i3$ est

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Une solution générale du système est donc donnée par l'équation présentée à la section 6.7.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= c_1 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(3t) - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(3t) \right) \\ &+ c_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(3t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(3t) \right) \\ &= c_1 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} -\cos(3t) + \sin(3t) \\ \cos(3t) \end{bmatrix} \right) + c_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} -\sin(3t) - \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=256

Exemple 6.7.2 : Résoudre un problème de valeur initiale

Résoudre le système d'équations différentielles avec des conditions initiales

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -15 & -11 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Afficher/Masquer la solution

1. Il faut d'abord trouver les valeurs propres de A.

Le polynôme caractéristique de la matrice coefficient A est donné par

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -15 & -11-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-11-\lambda) + 45$$

$$= \lambda^2 + 10\lambda + 34$$

$$= (\lambda + 5)^2 + 9$$

Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda = -5 \pm i3$, sont donc les valeurs propres de A.

2. Ensuite, on trouve les vecteurs propres correspondants en trouvant la solution à l'équation $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Cependant, on doit seulement trouver le vecteur propre associé à l'une des valeurs propres, par exemple $\lambda_1 = -5 - i3$.

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -15 & -11-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6+i3 & 3 \\ -15 & -6+i3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6+i3 & 3 & 0 \\ -15 & -6+i3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} - i\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = -5 - i3$ sont $\mathbf{u}_1 = t\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + i\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$. En prenant $t = 5$, on a un vecteur propre basique

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2+i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La partie réelle de $\mathbf{u}_1$ est $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ et la partie imaginaire de $\mathbf{u}_1$ est $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Le vecteur propre correspondant à la valeur propre conjuguée est le conjugué du vecteur propre $\mathbf{u}_1$. Ainsi, le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -5 + i3$ est

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2-i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Une solution générale du système est donc donnée par l'équation présentée à la section 6.7.1.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-5t}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\cos(3t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(3t)\right)$$
$$+ c_2 e^{-5t}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\sin(3t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(3t)\right)$$

4. On applique les conditions initiales pour trouver les constantes c_1 et c_2.

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$c_1 e^0\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\cos(0) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(0)\right) + c_2 e^0\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\sin(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(0)\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} -2c_1 + c_2 = -3 \\ 5c_1 = 12 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve

$$c_1 = \frac{12}{5}, \quad c_2 = \frac{9}{5}$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{y}(t) = \frac{12}{5}e^{-5t}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\cos(3t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(3t)\right) + \frac{9}{5}e^{-5t}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\sin(3t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(3t)\right)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=256

Section 6.7 Exercices

1. Trouve une solution au système d'équations différentielles

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos(6t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(6t)\right) + c_2 e^{-t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin(6t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(6t)\right)$$

2. Résoudre le système d'équations différentielles avec des conditions initiales

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -29 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -2e^{-3t}\cos(3t) + 8e^{-3t}\sin(3t) \\ y_2(t) &= 19e^{-3t}\cos(3t) - 25e^{-3t}\sin(3t) \end{aligned}$$

3. Résoudre le système d'équations différentielles avec des conditions initiales

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -17 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -2e^{-2t}\cos(t) + 3e^{-2t}\sin(t) \\ y_2(t) &= 11e^{-2t}\cos(t) - 10e^{-2t}\sin(t) \end{aligned}$$

6.8 SYSTÈMES HOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS : VALEURS PROPRES RÉPÉTÉES

Dans cette section, nous explorons les solutions d'un système homogène à coefficients constants lorsque les valeurs propres de la matrice coefficient sont répétées. En particulier, nous rencontrons un défi unique lorsque la multiplicité algébrique d'une valeur propre (le nombre de fois où elle apparaît comme racine du polynôme caractéristique) dépasse sa multiplicité géométrique (le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants qui lui sont associés). Cette différence nécessite une approche spécifique pour trouver toutes les solutions linéairement indépendantes nécessaires à une solution complète du système. Nous nous concentrons ici sur le cas où une valeur propre a une multiplicité algébrique de 2, mais une multiplicité géométrique de 1 seulement. Dans de telles situations, le concept de vecteurs propres généralisés devient crucial pour développer une solution complète.

Prenons un système homogène formulé comme suit :

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{6.8.1}$$

où la matrice A a une valeur propre λ qui est répétée deux fois (elle a donc une multiplicité algébrique de 2).

Théorème. Si une matrice $n \times n$ A a une valeur propre λ avec une multiplicité de 2, mais seulement un vecteur propre linéairement indépendant qui lui est associé (soit une multiplicité géométrique de 1), le système aura des solutions supplémentaires dérivées de vecteurs propres généralisés.

Trouver des vecteurs propres généralisés

Pour une valeur propre λ n'ayant qu'un vecteur propre standard indépendant $\mathbf{u}$, il faut trouver un vecteur propre généralisé $\mathbf{v}$ en résolvant l'équation

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{u}.$$

Ce vecteur propre généralisé $\mathbf{v}$ n'est pas une solution de $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, mais satisfait l'équation ci-dessus.

Construire la solution

La solution pour la valeur propre λ comporte des termes impliquant à la fois des vecteurs propres standard et des vecteurs propres généralisés. Les deux solutions sont linéairement indépendantes.

1. $\mathbf{y}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{u}$ – associée au vecteur propre standard.
2. $\mathbf{y}_2 = e^{\lambda t}t\mathbf{u} + e^{\lambda t}\mathbf{v}$ – associée au vecteur propre généralisé.

Solution générale du système

La solution générale du système présenté à la section 6.8.1 combine ces solutions.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{u} + \mathbf{v}) \tag{6.8.2}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

Exemple 6.8.1 : Résoudre un problème de valeur initiale avec un système de deux équations à deux inconnues

Résoudre le système d'équations différentielles avec les valeurs initiales données.

$$\mathbf{y'} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

1. Il faut d'abord trouver les valeurs propres de la matrice coefficient A.

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(5-\lambda) + 1$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

$$= (\lambda - 4)^2$$

Le polynôme caractéristique $c_A(\lambda)$ a une racine répétée. Ainsi, $\lambda_{1,2} = 4$ est la valeur propre de A avec une multiplicité de 2.

2. Pour trouver les vecteurs propres standard correspondants, il faut trouver la solution de l'équation $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Pour $\lambda_{1,2} = 4$, on a

$$(A - \lambda_{1,2} I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4 & -1 \\ 1 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_{1,2} = 4$ sont $\mathbf{u}_1 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_{1,2} = 4$ est $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Il faut trouver un vecteur propre généralisé v de façon à ce que

$$(A - \lambda_{1,2} I)\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solution est $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$. En prenant $t = 1$, un vecteur propre généralisé est $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Une solution générale du système est donnée par l'équation présentée à la section 6.8.2.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \left(t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

5. On applique les conditions initiales pour trouver les constantes c_1 et c_2.

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} -c_1 = -3 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

En résolvant le système, on obtient

$$c_1 = 3, \quad c_2 = -1$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{y}(t) = 3e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{4t} \left(t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=259

Exemple 6.8.2 : Résoudre un problème de valeur initiale avec un système de trois équations à trois inconnues

Résoudre le système d'équations différentielles avec les valeurs initiales données.

$$\begin{cases} y_1{}' = 3y_1 + y_2 \\ y_2{}' = 3y_2 \\ y_3{}' = 5y_1 - y_2 - 2y_3 \end{cases}, \quad y_1(0) = -2,\ y_2(0) = 5,\ y_3(0) = -5$$

Afficher/Masquer la solution

1. On exprime d'abord le PVI dans la notation matricielle.

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

où $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

2. On trouve les valeurs propres de la matrice coefficient A.

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 5 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(3-\lambda)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2$ avec une multiplicité de 1 et $\lambda_{2,3} = 3$ avec une multiplicité de 2.

3. Pour trouver les vecteurs propres standard correspondants, on résout $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Pour $\lambda_1 = -2$, on a

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_1 = -2$ sont $\mathbf{u}_1 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_1 = -2$ est $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_{2,3} = 3$, on a

$$(A - \lambda_{2,3} I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_{2,3} = 3$ sont $\mathbf{u}_2 = t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. En prenant $t = 1$, un vecteur propre basique correspondant à $\lambda_{2,3} = 3$ est $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_{2,3} = 3,$ la multiplicité géométrique est de 1, et donc inférieure à la multiplicité algébrique (qui est de 2). Cela signifie que la dimension de l'espace propre associé à $\lambda_{2,3}$ est égale à 1 (tous les vecteurs propres sont traversés par le seul vecteur $\mathbf{u}_2$).

4. On doit donc trouver un vecteur généralisé $\mathbf{v}$ de façon à ce que

$$(A - \lambda_{2,3}I)\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\5 & -1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système, on forme la matrice augmentée et on la transforme en FERL au moyen d'opérations de ligne.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\5 & -1 & -5 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{2}{5}\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

La solution est $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5}+t\\1\\t\end{bmatrix}$. En prenant $t = 0$, un vecteur propre généralisé est $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\1\\0\end{bmatrix}$.

5. Trois solutions linéairement indépendantes du système sont

– Pour $\lambda_1 = -2$ et le vecteur propre standard $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{y}_1 = e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

– Pour $\lambda_{2,3} = 3$ et le vecteur propre standard $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{y}_2 = e^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

– Pour $\lambda_{2,3} = 3$ et un vecteur propre généralisé $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{y}_3 = e^{3t}\left(t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2/5\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

6. Par conséquent, une solution générale au système est donnée par la combinaison linéaire des solutions ci-dessus :

$$\mathbf{y}(t) = c_1e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + c_2e^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + c_3e^{3t}\left(t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2/5\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

7. On applique maintenant les conditions initiales pour trouver les constantes.

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix}-2\\5\\-5\end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2/5\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\5\\-5\end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un système de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} c_2 + \frac{2}{5}c_3 = -2 \\ c_3 = 5 \\ c_1 + c_2 = -5 \end{cases}$$

En résolvant le système, on obtient

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -4, \quad c_3 = 5$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{y}(t) = -e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 4e^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 5e^{3t}\left(t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2/5\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=259

Section 6.8 Exercices

1. Résous le système d'équations différentielles

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix}-3 & 1\\-1 & -5\end{bmatrix}\mathbf{y},\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix}9\\-13\end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_1(t) = 13e^{-4t} - 4(1+t)e^{-4t}$$
$$y_2(t) = -13e^{-4t} + 4te^{-4t}$$

2. Résous le système d'équations différentielles

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix}-6 & 2\\-2 & -10\end{bmatrix}\mathbf{y},\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix}-14\\-26\end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$y_1(t) = 26e^{-8t} - 40(1+2t)e^{-8t}$$
$$y_2(t) = -26e^{-8t} + 80te^{-8t}$$

3. Résous le système d'équations différentielles

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y},\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\mathbf{y}(t) = 13e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{7}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - 6e^{2t}\left(t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13/4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

6.9 SYSTÈMES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES

Dans cette section, nous traitons du système linéaire non homogène

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{6.9.1}$$

où la matrice A est une fonction matricielle $n \times n$ et $\mathbf{f}$ est une fonction de forçage à *n* vecteurs. Le système homogène associé $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ est appelé **système complémentaire**.

Les méthodes abordées au chapitre 3, à savoir les coefficients indéterminés et la variation des paramètres, utilisées pour trouver des solutions particulières à des équations linéaires non homogènes peuvent être appliquées à des systèmes linéaires non homogènes. Nous nous intéressons ici à la méthode de variation des paramètres.

Variation des paramètres

La méthode de variation des paramètres expliquée à la section 3.5 pour des équations linéaires, s'applique également à des systèmes linéaires. Elle exige un ensemble fondamental de solutions à l'équation complémentaire (homogène).

Théorème. Supposons qu'une matrice $n \times n$ A et un vecteur *n* $\mathbf{f}$ sont continus sur un intervalle ouvert I. Disons que $\mathbf{y}_p$ est une solution particulière du système 6.9.1 sur I et que $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ est un ensemble fondamental de solutions du système complémentaire $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$. Alors, la solution générale de l'équation de la section 6.9.1 sur I est

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_c$$

où où $\mathbf{y}_c = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n$ est la solution complémentaire et c_i est une constante arbitraire. La solution générale peut donc être exprimée sous la forme

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n$$

Méthode de variation des paramètres pour des systèmes linéaires non homogènes

Trouver une solution particulière à $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$

1. Trouver un ensemble fondamental de solutions $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ au système complémentaire correspondant $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.
2. Former la matrice fondamentale $Y(t)$ pour le système complémentaire.

$$Y(t) = [\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y}_n]$$

3. Trouver l'inverse de la matrice fondamentale, $Y^{-1}(t)$.
4. Déterminer $\mathbf{v}(t) = \displaystyle\int Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$

5. Une solution particulière du système est donnée par

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \int Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$$

6. Une solution générale du système est donnée par

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n$$

Exemple 6.9.1 : Trouver la solution générale d'un système non homogène

Trouver la solution générale du système

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2e^t \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

1. Il faut d'abord trouver une solution fondamentale au système complémentaire associé (homogène).

Le polynôme caractéristique de la matrice coefficient A est donné par

$$c_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 3 \\ -6 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+4)(\lambda-5) + 18$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1)$$

Les racines de $c_A(\lambda)$, à savoir $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, sont les valeurs propres de A. On trouve ensuite les vecteurs propres correspondants.

Pour $\lambda_1 = 2$, on a

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les vecteurs propres correspondant à $\lambda_1 = 2$ sont $\mathbf{u}_1 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$.

Pour $\lambda_2 = -1$, on a

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres correspondant à $\lambda_2 = -1$ sont $\mathbf{u}_2 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour $t \neq 0$.

Par conséquent, $\left\{ e^{2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est un ensemble fondamental de solutions au système complémentaire.

2. Ainsi, la matrice fondamentale $Y(t)$ pour le système complémentaire est

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

3. On détermine $Y^{-1}(t)$

$$Y^{-1}(t) = \frac{1}{-e^{2t}e^{-t} + 2e^{2t}e^{-t}} \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -2e^{2t} & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ -2e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix}$$

4. On détermine $\mathbf{v}(t)$ en définissant une constante d'intégration nulle

$$\mathbf{v}(t) = \int Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$$

$$= \int \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ -2e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2e^{t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \int \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ -4e^{t} + 2e^{2t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} \\ -4e^{t} + e^{2t} \end{bmatrix}$$

5. Une solution particulière du système est donc donnée par

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t).\,\mathbf{v}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} \\ -4e^{t} + e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 - 3e^{t} \\ -6 + 5e^{t} \end{bmatrix}$$

6. Une solution générale du système est donc donnée par

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 5 - 3e^{t} \\ -6 + 5e^{t} \end{bmatrix} + c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui peut s'écrire

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 - 3e^{t} \\ -6 + 5e^{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=262

Exemple 6.9.2 : Trouver la solution générale d'un système non homogène

Trouver la solution générale du système

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 14 & -13 \\ 0 & 11 & -7 \\ 0 & 14 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2e^t \\ 0 \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la solution

Le système complémentaire est

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 14 & -13 \\ 0 & 11 & -7 \\ 0 & 14 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Le vecteur de forçage est

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 0 \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$$

1. Dans l'exemple 6.6.3 de la section 6.6, on a trouvé un ensemble fondamental de solutions du système complémentaire associé au système donné dans cet exemple.

$$\left\{ e^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ e^{-3t}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \right\}$$

2. La matrice fondamentale $Y(t)$ pour le système complémentaire est

$$Y(t)=\begin{bmatrix}e^{3t} & e^{4t} & 2e^{-3t}\\ 0 & e^{4t} & e^{-3t}\\ 0 & e^{4t} & 2e^{-3t}\end{bmatrix}$$

3. On détermine $Y^{-1}(t)$ au moyen de la méthode de réduction en lignes, ce qui suppose d'augmenter la matrice $Y(t)$ avec la matrice identité.

$$[Y \mid I]\sim[I \mid Y^{-1}]$$

$$Y^{-1}=\begin{bmatrix}e^{-3t} & 0 & -e^{-3t}\\ 0 & 2e^{-4t} & -e^{-4t}\\ 0 & -e^{3t} & e^{3t}\end{bmatrix}$$

4. On détermine $\mathbf{v}(t)$ en définissant une constante d'intégration nulle.

$$\mathbf{v}(t)=\int Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$$

$$=\int\begin{bmatrix}e^{-3t} & 0 & -e^{-3t}\\ 0 & 2e^{-4t} & -e^{-4t}\\ 0 & -e^{3t} & e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^{t}\\ 0\\ -e^{2t}\end{bmatrix}dt$$

$$=\int\begin{bmatrix}2e^{-2t}+e^{-t}\\ e^{-2t}\\ -e^{5t}\end{bmatrix}dt$$

$$=\begin{bmatrix}-e^{-2t}-e^{-t}\\ -\frac{1}{2}e^{-2t}\\ -\frac{1}{5}e^{5t}\end{bmatrix}$$

5. Une solution particulière du système est donc donnée par

$$\mathbf{y}_p(t) = Y(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$
$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{4t} & 2e^{-3t} \\ 0 & e^{4t} & e^{-3t} \\ 0 & e^{4t} & 2e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-2t} - e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{1}{5}e^{5t} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -10e^{t} - 19e^{2t} \\ -7e^{2t} \\ -9e^{2t} \end{bmatrix}$$

6. Une solution générale du système est donc donnée par

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n$$
$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -10e^{t} - 19e^{2t} \\ -7e^{2t} \\ -9e^{2t} \end{bmatrix} + c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ce qui peut également être exprimé par

$$\mathbf{y} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -10e^{t} - 19e^{2t} \\ -7e^{2t} \\ -9e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{4t} & 2e^{-3t} \\ 0 & e^{4t} & e^{-3t} \\ 0 & e^{4t} & 2e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Section 6.9 Exercices

1. Trouve la solution générale du système d'équations différentielles

$$\mathbf{y'} = \begin{bmatrix} -25 & 36 \\ -18 & 26 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5e^{t} \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -26 - 90e^{t} \\ -18 - 65e^{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3e^{-t} & 4e^{2t} \\ 2e^{-t} & 3e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

2. Trouve la solution générale du système d'équations différentielles

$$\mathbf{y'} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5e^{t} \end{bmatrix}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -4 - 7{,}5e^{t} \\ 6 + 10e^{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{2t} \\ 2e^{-t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

6.10 APPLICATIONS

A. Introduction

Dans cette section, nous revenons sur l'application des équations différentielles dans la modélisation des systèmes d'ingénierie. En particulier, nous nous intéressons aux vibrations mécaniques et aux circuits électriques, deux grands domaines donnant lieu à l'application de systèmes d'équations différentielles.

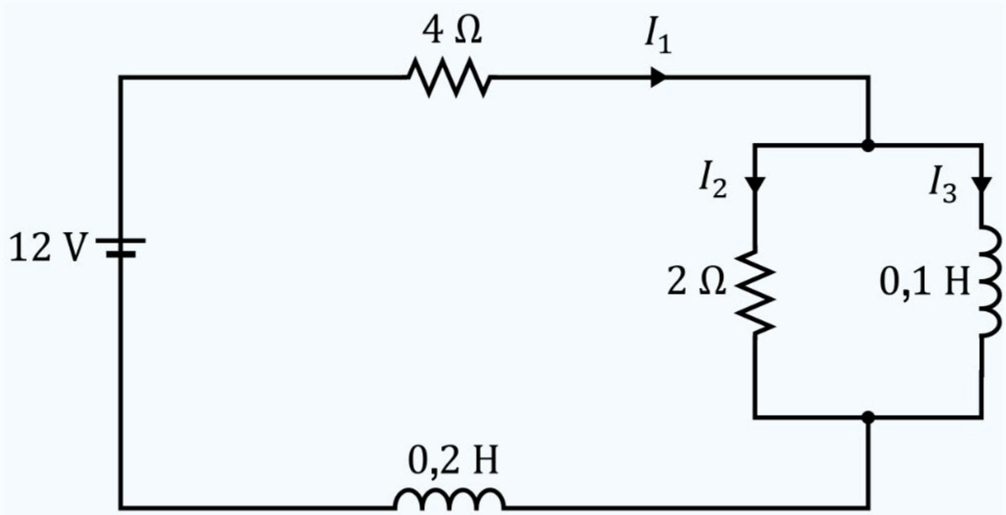
Les équations différentielles sont d'une grande utilité dans divers domaines d'ingénierie. En génie chimique, elles sont essentielles pour modéliser la cinétique des réactions et la dynamique des processus, notamment dans des scénarios tels que les problèmes de mélanges impliquant plusieurs réservoirs et substances, des facteurs déterminants pour la conception des réacteurs et l'optimisation des processus. En génie civil, les modèles d'équations différentielles sont indispensables pour évaluer la sécurité et la longévité des structures soumises à diverses conditions de charge, comme dans l'analyse de la résistance sismique des bâtiments à plusieurs étages. L'ingénierie aérospatiale se sert de ces équations pour simuler le mouvement des avions et des engins spatiaux, en y intégrant à la fois la dynamique de translation et la dynamique de rotation. Ces connaissances sont primordiales pour élaborer des systèmes de contrôle qui améliorent la stabilité et la manœuvrabilité. L'ingénierie environnementale utilise également des modèles d'équations différentielles pour suivre la propagation des polluants, ce qui permet de concevoir des mesures efficaces de protection de l'environnement.

B. Circuits électriques

Les lois de Kirchhoff, que nous avons vues à la section 2.5, servent de base à la dérivation des équations directrices. Ces lois facilitent l'analyse des circuits en fournissant une approche systématique du calcul des courants et des tensions en divers points du circuit. Dans les circuits plus complexes, par exemple les circuits série-parallèle,

Exemple 6.10.1 : Circuit série RL – Système d'équations linéaires

a) Pour le schéma de circuit électrique donné, déterminer le système d'équations différentielles qui décrit les courants dans les différentes branches du circuit. On suppose que tous les courants initiaux sont nuls. **b)** Une fois que le système d'équations différentielles et les conditions initiales sont établis, résoudre le système pour les courants dans chaque branche du circuit.



Description du schéma

Prenons un circuit alimenté par une batterie de 12 V CC. Une résistance de 4 Ω est branchée en série sur la borne positive de l'alimentation. Après cette résistance, le circuit se divise en deux branches parallèles. La première branche parallèle comporte une résistance de 2 Ω et la seconde un inducteur de 0,1 H. Ces deux branches convergent ensuite et le circuit continue à travers un inducteur de 0,2 H avant de revenir à la borne négative de l'alimentation. Compte tenu de cette configuration, calculer les courants I1 (aux bornes de la résistance de 4 Ω), I2 (aux bornes de la résistance de 2 Ω) et I3 (aux bornes de l'inducteur de 0,1 H). On suppose que les inducteurs sont en régime permanent.

Afficher/Masquer la solution

a) Dans l'exemple 4.8.2, nous avons examiné ce circuit RL et l'avons analysé avec la transformée de Laplace. Dans cet exemple, nous résolvons le même circuit avec la méthode matricielle. Les équations du système pour le circuit sont les suivantes, avec pour conditions initiales la nullité de tous les courants à l'instant $t = 0$.

$$\begin{cases} 4I_1 + 0{,}1I'_3 + 0{,}2I'_1 = 12 \\ 0{,}1I'_3 - 2I_2 = 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0 \tag{6.10.1}$$

b) Étapes de résolution du système :

1. Le système de la section 6.10.1 est un mélange d'équations différentielles et d'équations algébriques.

Il faut d'abord convertir ce système en un système d'équations différentielles linéaires en utilisant la deuxième équation pour exprimer $0,1I'_3$ en tant que $2I_2$ dans la première équation et en isolant les premières dérivées dans les deux premières équations. Ce qui donne :

$$\begin{cases} I'_1 = -20I_1 - 10I_2 + 60 \\ I'_3 = 20I_2 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{cases} ; \quad I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0 \tag{6.10.1}$$

Pour créer un système d'équations différentielles linéaires à partir du système donné, il faut tenir compte du fait que I_2 n'a pas de dérivée présente. Pour contourner ce problème, il faut éliminer I_2 des équations. Pour ce faire, on réarrange la troisième équation de façon à exprimer I_2en termes deI_1 et I_3, puis on remplace cette expression par I_2 dans les autres équations.

$$I_2 = I_1 - I_3 \tag{6.10.2}$$

On simplifie ensuite le système en

$$\begin{cases} I'_1 = -30I_1 + 10I_3 + 60 \\ I'_3 = 20I_1 - 20I_3 \end{cases} ; \quad I_1(0) = I_3(0) = 0 \tag{6.10.2}$$

2. On exprime ensuite le problème de valeur initiale (PVI) sous forme matricielle.

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} -30 & 10 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Ensuite, on trouve une solution fondamentale au système complémentaire associé (homogène). Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} -30 - \lambda & 10 \\ 20 & -20 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-30 - \lambda)(-20 - \lambda) - 200$$

$$= \lambda^2 + 50\lambda + 400$$

$$= (\lambda + 10)(\lambda + 40)$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants sont

$$\lambda_1 = -10 : \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2 = -40 : \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, $\left\{ e^{-10t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ e^{-40t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est un ensemble fondamental de solutions au système complémentaire.

Ainsi, la matrice fondamentale $I_c(t)$ pour le système complémentaire est

$$I_c(t) = \begin{bmatrix} e^{-10t} & -e^{-40t} \\ 2e^{-10t} & e^{-40t} \end{bmatrix}$$

3. Il faut maintenant déterminer une solution particulière du système.
(i) Déterminer $I_c^{-1}(t)$

$$I_c^{-1}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{10t} & e^{10t} \\ -2e^{40t} & e^{40t} \end{bmatrix}$$

(ii) Déterminer$\mathbf{v}(t)$en définissant une constante d'intégration nulle

$$\mathbf{v}(t) = \int I_c^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$$

$$= \int \begin{bmatrix} e^{10t} & e^{10t} \\ -2e^{40t} & e^{40t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{10t} \\ -e^{40t} \end{bmatrix}$$

Une solution particulière du système est donc donnée par

$$\mathbf{I}_p(t) = I_c(t).\ \mathbf{v}(t)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-10t} & -e^{-40t} \\ 2e^{-10t} & e^{-40t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{10t} \\ -e^{40t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Une solution générale du système est donc donnée par

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_p + \mathbf{I}_c$$
$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + c_1 e^{-10t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-40t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. On applique maintenant les conditions initiales pour trouver les constantes dans la solution générale.

$$\mathbf{I}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + c_1 e^{-10t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-40t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = -3 \\ 2c_1 + c_2 = -3 \end{cases}$$

En résolvant le système, on obtient

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 1$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - 2e^{-10t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{-40t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cela donne, dans les expressions finales pour I_1 et I_3 :

$$I_1 = 3 - 2e^{-10t} - e^{-40t}$$

$$I_3 = 3 - 4e^{-10t} + e^{-40t}$$

6. Pour trouver I_2, on remplace à nouveau l'expression par I_1 et I_3 dans l'équation (6.10.1), ce qui donne

$$I_2 = I_1 - I_3$$

$$I_2 = 2e^{-10t} - 2e^{-40t}$$

C. Vibrations mécaniques

L'analyse des vibrations mécaniques est cruciale pour concevoir des systèmes résistants aux charges dynamiques. Un modèle plus réaliste qui capture l'essence des systèmes mécaniques implique de considérer non seulement les masses et les ressorts, mais aussi les éléments d'amortissement et les forces externes. Cette section se concentre sur un système composé de deux masses reliées par des ressorts dans un arrangement horizontal, avec amortissement et des forces externes agissant sur les deux masses. Un tel modèle peut représenter un large éventail d'applications techniques, des suspensions de véhicules aux composants de machines. Un schéma du système est présenté à la figure 6.10.1.

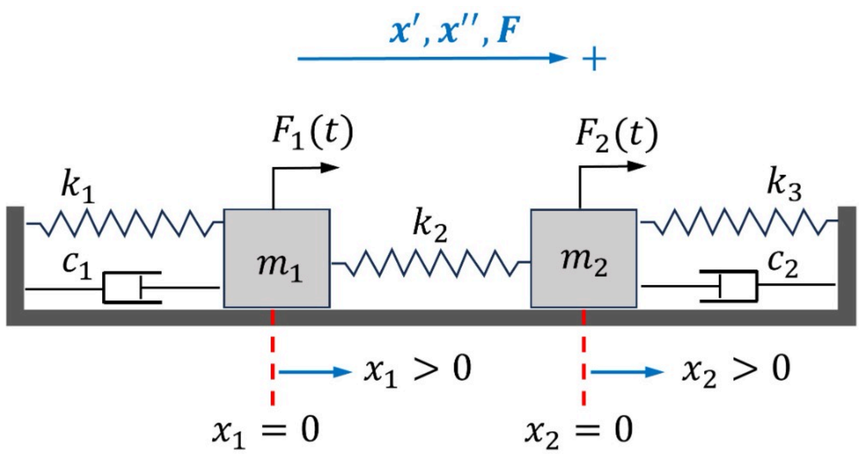


Figure 6.10.1 Schéma d'un système couplé masse-ressort comprenant deux masses reliées par trois ressorts et deux amortisseurs.

Hypothèses

Pour procéder à la dérivation des équations du mouvement du système, on fait les hypothèses suivantes :

- Amortissement linéaire : chaque masse est couplée à un élément d'amortissement, caractérisé par les coefficients d'amortissement linéaire c_1 pour m_1 et c_2 pour m_2. Ces coefficients quantifient la résistance au mouvement de chaque masse.
- Forces externes : des forces externes dépendantes du temps $F_1(t)$ et $F_2(t)$ agissent respectivement sur m_1 et m_2 et sont considérées comme positives dans la direction droite.
- Élasticité linéaire : les ressorts obéissent à la loi de Hooke, c'est-à-dire que la force exercée sur chaque ressort est directement proportionnelle à son déplacement par rapport à la longueur de repos.

- Petits déplacements : l'analyse suppose de petits déplacements à partir du point d'équilibre, ce qui autorise la linéarisation du système. Les déplacements sont réputés être positifs lorsqu'ils sont orientés vers la droite.
- Corps rigide : les masses sont traitées comme des points matériels, tandis que les ressorts et les amortissements sont censés être de masse nulle, se concentrant uniquement sur les forces et déplacements axiaux.

Configuration du système

Nous considérons un cas général avec un système constitué de deux masses, m_1 et m_2, reliées par trois ressorts aux constantes de rigidité k_1, k_2 et k_3 et augmentées par deux amortisseurs. Les ressorts extérieurs sont attachés à des parois fixes. Les forces externes agissent sur les masses et les amortisseurs contrecarrent leurs mouvements. Cette structure permet d'ajuster les forces externes et les effets d'amortissement, de façon à s'adapter aux scénarios dans lesquels ces forces sont absentes en fixant leurs valeurs respectives à zéro.

Exemple 6.10.2 : Vibrations mécaniques – Système amorti et forcé

Dériver le système d'équations différentielles pour le système couplé amorti et forcé décrit ci-dessus (figure 6.10.1).

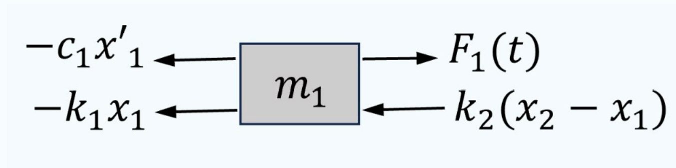
Afficher/Masquer la solution

La dynamique de ce système amorti avec des forces externes est régie par deux équations différentielles linéaires couplées du second ordre, reflétant l'équilibre des forces sur chaque masse. Ici, on considère que la direction des forces externes est vers la droite et que les déplacements sont également positifs (sur la droite), en supposant que le déplacement de la masse 1, x_1, est supérieur au déplacement de la masse 2, x_2, de sorte que <img src= »https://ecampusontario.pressbooks.pub/app/uploads/sites/4139/2024/03/1ec42a5d6afa01282b848a2eae5aade4.png » alt= »x_2-x_1<0″ title= »x_2-x_1.

1) Les forces agissant sur la masse m_1 sont

- Force de rappel du ressort k_1 , $F_{s1} = -k_1 x_1$.
- Force de rappel du ressort k_2 , $F_{s2} = -k_2(x_2 - x_1)$, où $x_2 - x_1$ est le déplacement du ressort du milieu.

- Force d'amortissement $F_{d1} = -c_1 x_1{'}$, où c_1 est le coefficient d'amortissement de l'amortisseur 1. Si elle est présente, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse de la masse, mais dans la direction opposée au mouvement.
- Force externe $F_1(t)$. Il s'agit de toute force externe agissant sur la masse m_1, qui peut être périodique ou aléatoire, et induisant des vibrations forcées.



D'après la deuxième loi du mouvement de Newton,

$$ma = \sum F$$

$$m_1 x''_1 = -c_1 x'_1 - k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1(t)$$

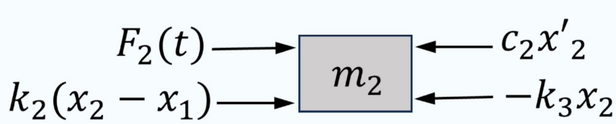
Cette équation peut être simplifiée en

$$m_1 x''_1 = -c_1 x'_1 - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 + F_1(t)$$

On remarque que, comme $x_2 < x_1$, le ressort k_2 est comprimé et la force qu'il exerce sur la masse 1 est orientée vers la gauche (négative), le but étant de rétablir le ressort à sa longueur d'équilibre.

2) Les forces agissant sur la masse m_2 sont

- Force de rappel du ressort k_3, $F_{s1} = -k_3 x_2$.
- Force de rappel du ressort k_2, $F_{s2} = k_2(x_2 - x_1)$, où $x_2 - x_1$ est le déplacement du ressort du milieu.
- Force d'amortissement $F_{d1} = -c_2 x_2{'}$, où c_2 est le coefficient d'amortissement de l'amortisseur 2. Si elle est présente, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse de la masse, mais dans la direction opposée au mouvement.
- Force externe $F_2(t)$. Il s'agit de toute force externe agissant sur la masse m_2, qui peut être périodique ou aléatoire, et induisant des vibrations forcées.



D'après la deuxième loi du mouvement de Newton,

$$ma = \sum F$$

$$m_2 x''_2 = -c_2 x'_2 - k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t)$$

Cette équation peut être simplifiée en

$$m_2 x''_2 = -c_2 x'_2 + k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 + F_2(t)$$

On remarque que, comme $x_2 < x_1$, le ressort k_2 est comprimé et la force qu'il exerce sur la masse 2 est orientée vers la droite et devrait être positive, ce qui est cohérent avec le signe de $-k_2(x_2 - x_1) > 0$0″ title= »-k_2(x_2-x_1)>0″ class= »asciimath mathjax »>.

Par conséquent, les déplacements dépendants du temps des masses sont décrits par le système d'équations différentielles

$$m_1 x''_1 = -c_1 x'_1 - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 + F_1(t)$$
$$m_2 x''_2 = -c_2 x'_2 + k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 + F_2(t)$$

Exemple 6.10.3 : Vibrations mécaniques – Réécrire un système en équations du premier ordre

a) Réécrire le système dérivé d'équations différentielles de l'exemple 6.10.2 en un système d'équations du premier ordre. **b)** Écrire le système sous forme matricielle.

Afficher/Masquer la solution

a) Les équations régissant la système masse-ressort de la figure 6.10.1 sont dérivées dans l'exemple 6.10.2.

$$m_1 x''_1 = -c_1 x'_1 - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 + F_1(t)$$
$$m_2 x''_2 = -c_2 x'_2 + k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 + F_2(t)$$

La section 6.4-C a expliqué comment convertir des équations différentielles d'ordre supérieur en un système d'équations du premier ordre. On introduit de nouvelles variables comme suit :

$y_1 = x_1$, $y_2 = x'_1$, $y_3 = x_2$, et $y_4 = x'_2$

Les équations peuvent alors être écrites comme suit :

$$y'_1 = y_2$$
$$m_1 y'_2 = -c_1 y_2 - (k_1 + k_2) y_1 + k_2 y_3 + F_1(t)$$
$$y'_3 = y_4$$
$$m_2 y'_4 = -c_2 y_4 + k_2 y_1 - (k_2 + k_3) y_3 + F_2(t)$$

b) Le système sous forme matricielle est

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1(t)}{m_1} \\ 0 \\ \frac{F_2(t)}{m_2} \end{bmatrix}$$

Exemple 6.10.4 : Résoudre un problème de valeur initiale : vibration libre non amortie

Considérons un système masse-ressort couplé, tel celui de l'exemple 6.10.2, avec les paramètres suivants : les deux masses m_1 et m_2 pèsent 1 kg et toutes les constantes du ressortk_1, k_2 et k_3 sont de 1 N/m. Le système est isolé contre les forces externes et les effets d'amortissement. Au départ, les déplacements et les vitesses sont $x_1(0) = 0$ m, $x'_1(0) = 0$ m/s, $x_2(0) = 1$ m et $x'_2(0) = 0$ m/s. Résoudre le problème de valeur initiale pour déterminer les déplacements des masses en fonction du temps. Étant donné la complexité des calculs, utiliser un logiciel d'algèbre matricielle pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres.

Afficher/Masquer la solution

Informations données :

- $m_1 = m_2 = 1\,\text{kg}$
- $k_1 = k_2 = k_3 = 1\,\text{N}/\text{m}$
- Pas d'amortissement : $c_1 = c_2 = 0$
- Pas de forces externes : $F_1 = F_2 = 0$
- Conditions initiales :$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1\,\text{m}, x'_1(0) = x_2'(0) = 0$

Dans l'exemple 6.10.3, on a converti un système du second ordre régissant le système masse-ressort couplé en un système du premier ordre et on l'a exprimé en notation matricielle.

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1(t)}{m_1} \\ 0 \\ \frac{F_2(t)}{m_2} \end{bmatrix}$$

où

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ x_2 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant les valeurs données, le problème de valeur initial devient

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant un logiciel d'algèbre matricielle, on trouve les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice coefficient. Les valeurs propres et les vecteurs propres se présentent sous la forme des paires complexes conjuguées suivantes :

Vecteur propre pour $\lambda_{1,2} = \pm i : \mathbf{u}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vecteur propre pour $\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{3}i : \mathbf{u}_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

La solution pour chaque paire est donnée par l'équation présentée à la section 6.7.1.

Pour la première paire, $\lambda_1, 2 = \pm i$, les deux solutions linéairement indépendantes sont

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(t) - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(t) = \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \\ -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

Pour la seconde paire, $\lambda_3, 4 = \pm\sqrt{3}i$, les deux solutions linéairement indépendantes sont

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ -3\cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t) + \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{3}t) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ -3\sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}$$

La matrice fondamentale du système est donc

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(t) & -\cos(t) & -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(t) & \sin(t) & -3\cos(\sqrt{3}t) & -3\sin(\sqrt{3}t) \\ \sin(t) & -\cos(t) & \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(t) & \sin(t) & 3\cos(\sqrt{3}t) & 3\sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solution générale du système sous forme matricielle est

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) & -\cos(t) & -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(t) & \sin(t) & -3\cos(\sqrt{3}t) & -3\sin(\sqrt{3}t) \\ \sin(t) & -\cos(t) & \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(t) & \sin(t) & 3\cos(\sqrt{3}t) & 3\sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

En appliquant les conditions initiales, on obtient

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant les coefficients, on trouve

$$c_1 = 0,\ c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

La solution du problème de valeur initiale est donc

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) & -\cos(t) & -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(t) & \sin(t) & -3\cos(\sqrt{3}t) & -3\sin(\sqrt{3}t) \\ \sin(t) & -\cos(t) & \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) & -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \cos(t) & \sin(t) & 3\cos(\sqrt{3}t) & 3\sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$$

Elle peut s'écrire comme suit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) \\ -\frac{1}{2}\sin(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) \\ -\frac{1}{2}\sin(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}$$

Rappelons que, dans l'exemple 10.6.3, on a introduit des variables $\mathbf{y}_n$ pour représenter les déplacements et les vitesses des masses.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ x_2 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

Étant donné cette conversion, les déplacements de la masse 1 (x_1) et de la masse 2 (x_2) en fonction du temps sont déterminés par

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t)$$
$$x_2 = y_3 = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t)$$

La représentation graphique ci-dessous montre les déplacements des deux masses au fil du temps dans un système masse-ressort couplé dans cet exemple, sur un graphique avec le temps sur l'axe horizontal (allant de 0 à 10 secondes) et le déplacement en mètres sur l'axe vertical. La ligne pour la masse 1 oscille, soit un modèle de mouvement qui varie entre des déplacements positifs et des déplacements négatifs, suggérant un mouvement harmonique complexe. La ligne de la masse 2 suit un schéma oscillatoire similaire, mais avec des différences de phase et d'amplitude par rapport à la masse 1, reflétant l'interaction entre les deux masses au moyen du système de ressorts.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=870

Section 6.10 Exercices

1. Considère un système masse-ressort couplé, tel celui de l'exemple 6.10.2, avec les paramètres suivants : les masses m_1 et m_2 pèsent 1 kg et toutes les constantes du ressortk_1, k_2 et k_3 sont de 1 N/m. Le système est isolé contre les forces externes et les effets d'amortissement. Au départ, les déplacements et les vitesses sont $x_1(0) = 0$ m, $x'_1(0) = 2$ m/s, $x_2(0) = 0$ m et $x'_2(0) = 0$ m/s. Résoudre le problème de valeur initiale pour déterminer les déplacements des masses en fonction du temps. Utilise un logiciel d'algèbre matricielle pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres.

   Afficher/Masquer la réponse

$$x_1 = \sin(t) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$
$$x_2 = \sin(t) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES

Description du chapitre

Ce chapitre donne un bref aperçu des équations différentielles partielles, qui impliquent des dérivées partielles d'une fonction par rapport à plusieurs variables indépendantes.

7.1 Introduction : cette section présente les conditions initiales et les conditions aux limites, essentielles pour résoudre des problèmes de valeur initiale aux limites dans les EDP.

7.2 Série de Fourier : cette section passe en revue les séries de Fourier, un outil crucial pour exprimer la solution d'équations différentielles partielles.

7.3 Équation de la chaleur : cette section traite de l'utilisation de la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation de la chaleur, qui décrit comment la chaleur se diffuse dans un milieu au fil du temps.

7.4 Équation des ondes : Cette section présente brièvement la solution de l'équation des ondes, qui modélise la propagation des ondes, telles que les ondes sonores et lumineuses, à travers un milieu.

Pionniers du progrès

Maryam Mirzakhani, née en 1977 à Téhéran, en Iran, est une mathématicienne d'avant-garde dont les profondes contributions à la géométrie et aux systèmes dynamiques ont remodelé notre compréhension de ces domaines. Son parcours mathématique, qui a commencé par de retentissants succès aux Olympiades internationales de mathématiques, s'est achevé par l'obtention de la prestigieuse médaille Fields en 2014, faisant d'elle la première femme à recevoir cet honneur. Les travaux novateurs de Maryam Mirzakhani à l'université de Harvard, sous la direction de Curtis McMullen, se sont concentrés sur la géométrie complexe des surfaces de Riemann et de leurs espaces de modules, recoupant des domaines tels que la géométrie hyperbolique et la théorie de Teichmüller. Réputée pour sa réflexion profonde et créative et sa capacité à établir des liens entre différents domaines mathématiques, Mirzakhani ne s'est pas seulement contentée de résoudre des problèmes de longue date, mais a également inspiré toute une génération, en particulier des femmes et des jeunes filles dans le domaine des STIM, grâce à son intelligence et à sa persévérance

Maryam Mirzakhani (1977-2007).
Source : Maryeraud9, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons

remarquables. Son héritage en tant que symbole de la curiosité intellectuelle et de l'innovation fait d'elle une figure exemplaire pour illustrer la portée et l'importance des concepts mathématiques.

7.1 INTRODUCTION

Contrairement aux équations différentielles ordinaires (EDO), qui impliquent des dérivées par rapport à une seule variable, les équations différentielles partielles (EDP) impliquent des dérivées partielles d'une fonction par rapport à plusieurs variables indépendantes. Essentiellement, une EDP est une équation qui relie les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

Les EDP sont fondamentales pour modéliser et comprendre les systèmes complexes du monde naturel, par exemple en physique, permettant de décrire la mécanique des ondes, les champs électromagnétiques et le transfert de chaleur. Par exemple, les équations de Maxwell, qui constituent la pierre angulaire de la théorie électromagnétique, sont exprimées sous forme d'EDP ou, dans le domaine de l'ingénierie, pour l'analyse des contraintes et des déformations dans les matériaux, la dynamique des fluides et la thermodynamique.

A. Problèmes de conditions aux limites

Dans le contexte des équations différentielles, particulièrement pertinent pour les étudiants en ingénierie, la compréhension des problèmes de conditions aux limites et des problèmes de valeur initiale est cruciale.

Un **problème de conditions aux limites**, ou problème aux limites, implique la résolution d'une équation différentielle soumise à un ensemble de contraintes appelées conditions aux limites. Ces conditions spécifient le comportement d'une solution aux limites du domaine sur lequel l'équation est définie. Dans le cas des équations différentielles partielles (EDP), ces domaines sont souvent spatiaux et les limites peuvent être physiques ou géométriques.

Un **problème de valeur initiale**, en revanche, implique la résolution d'une équation différentielle en fonction de la valeur de la solution en un point spécifique, souvent le début du domaine temporel. Pour les EDO et les EDP dépendantes du temps, ces conditions initiales spécifient l'état du système au début de la période observée.

B. Conditions aux limites et conditions initiales

- **Conditions aux limites** : il s'agit de contraintes spécifiées aux limites du domaine spatial d'une PDE. Elles peuvent être de différents types :
  - **Conditions aux limites de Dirichlet** : spécifient la valeur de la solution à la limite.
  - **Conditions aux limites de Neumann** : spécifient la valeur de la dérivée de la solution à la limite.
  - **Conditions aux limites de Robin ou de troisième type** : impliquent une combinaison de valeurs et de dérivées de la solution à la limite.
- **Conditions initiales** : elles spécifient l'état du système au début de la période d'observation, souvent l'instant $t = 0$ pour les problèmes dépendants du temps. Elles sont essentielles pour déterminer l'évolution unique du système au fil du temps.

7.2 SÉRIE DE FOURIER

Pour résoudre des équations différentielles partielles, on emploie souvent une méthode qui transforme les équations différentielles partielles complexes en équations différentielles ordinaires plus simples. Une étape clé de cette méthode consiste à exprimer les fonctions sous forme de séries de Fourier trigonométriques. Cette section donne donc un bref aperçu des séries de Fourier, ce qui nous permettra d'aborder efficacement la résolution des équations différentielles partielles dans les sections suivantes.

A. Série de Fourier

Une série de Fourier est une expansion d'une fonction $f(x)$ en termes d'une somme infinie de sinus et de cosinus. La série permet d'exprimer une forme d'onde périodique complexe comme une combinaison de fonctions oscillantes simples.

Décomposition en sinus et cosinus

La formule pour une série de Fourier d'une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $-L \leq x \leq L$ est

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

où a_0, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier qui déterminent la grandeur des termes correspondants en sinus et en cosinus. Ils sont calculés comme suit :

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

B. Série de Fourier de sinus et de cosinus

Dans certains cas, la fonction $f(x)$ peut avoir des symétries spécifiques, qui simplifient la série de Fourier :

Série de sinus : si $f(x)$ est une fonction impaire (à savoir $f(-x) = -f(x)$), les termes en cosinus de la série de Fourier disparaissent et seules les termes en sinus subsistent. Il s'ensuit une série de sinus, qui est particulièrement utile pour les fonctions définies sur des intervalles symétriques et satisfaisant certaines conditions aux limites, comme la nullité aux extrémités.

Série de cosinus : si $f(x)$ est une fonction paire (à savoir $f(-x) = f(x)$), les termes en sinus disparaissent, ne laissant que les termes en cosinus. La série de cosinus obtenue est utile pour les problèmes dans lesquels la dérivée de $f(x)$ est nulle aux extrémités.

Les séries de Fourier font partie intégrante de la résolution des EDP, en particulier lorsque l'on utilise la méthode de séparation des variables. Cette méthode exige souvent que les conditions aux limites soient satisfaites, ce qui est possible avec la série de Fourier. En exprimant une fonction sous la forme d'une série de Fourier, les EDP peuvent être transformées en EDO plus simples, chacune associée à une composante de fréquence différente de la fonction d'origine.

Exemple 7.2.1 : Trouver une série de Fourier

Trouver la série de Fourier Series de $f(x) = x$ sur $[-2, 2]$.

Afficher/Masquer la solution

L'extrémité L est 2. La série de Fourier est donc

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x\,dx \\ a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

$f(x) = x$ étant une fonction impaire, a_0 et a_n sont nuls. De même, x et le sinus étant tous deux des fonctions impaires, leur produit est une fonction paire. Ainsi, l'intégrale sur un intervalle symétrique de $[-2, 2]$ peut être simplifiée en

$$b_n = \int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

On évalue b_n à l'aide de la technique de l'intégration par parties.

$$= \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^2$$

$$= \frac{-4\cos(n\pi)}{n\pi}$$

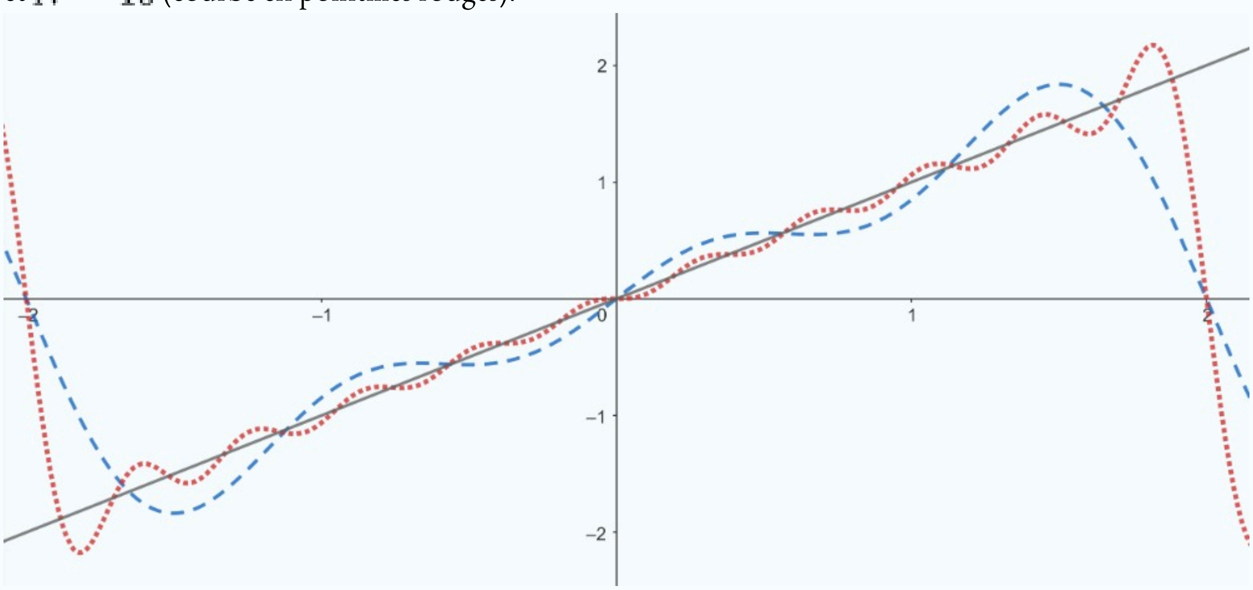
Étant donné $\cos(n\pi) = (-1)^n$, b_n est simplifié en

$$b_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

La série de Fourier est donc

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

La figure ci-dessous représente graphiquement $f(x) = x$ (ligne noire pleine) et son approximation par les sommes partielles de sa série de Fourier sur $[-2, 2]$ pour $N = 3$ (courbe en pointillés bleus) et $N = 10$ (courbe en pointillés rouges).



La figure interactive ci-dessous présente une comparaison visuelle entre l'approximation de la série de Fourier d'une fonction mathématique et la fonction linéaire $f(x) = x$, tracée sur l'intervalle $[-2, 2]$. L'approximation de la série de Fourier, représentée par une ligne en pointillés bleus, illustre la manière dont une fonction peut être représentée comme une somme de fonctions sinusoïdales plus simples. Le nombre de termes inclus dans l'approximation de la série de Fourier peut être ajusté dynamiquement à l'aide d'un curseur interactif, allant de 1 à 10 termes. Cette caractéristique permet d'observer l'impact de l'augmentation du nombre de termes de la série sur la précision de l'approximation de la fonction réelle. La fonction linéaire $f(x) = x$ est représentée par une ligne pleine rouge pour référence.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=281

Exemple 7.2.2 : Trouver une série de Fourier

Trouver la série de Fourier Series de $f(x) = x^2$ sur $[-2, 2]$.

Afficher/Masquer la solution

L'extrémité L est 2. La série de Fourier est donc

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x^2\,dx \\ a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

$f(x) = x^2$ est une fonction paire, alors que le sinus est une fonction impaire, de sorte que leur produit est une fonction impaire. Ainsi, $b_n = 0$. Le produit du cosinus (aussi une fonction paire) et de x^2 est une fonction paire, de sorte que a_0 et a_n peuvent être simplifiés en

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \int_0^2 x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

Pour évaluer a_n, il faut utiliser la technique d'intégration par parties deux fois.

$$= \left[\frac{2x^2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{16}{(n\pi)^3}\left(\frac{-n\pi}{2}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)$$

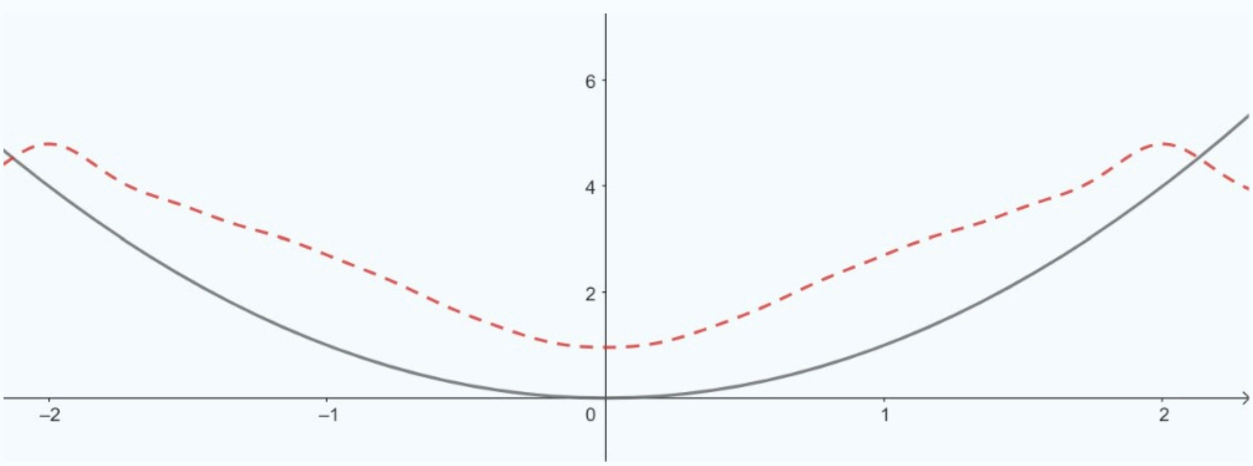
Étant donné $\cos(n\pi) = (-1)^n$, a_n peut être simplifié en

$$a_n = \frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

La série de Fourier est donc

$$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

La figure ci-dessous représente graphiquement $f(x) = x^2$ (ligne noire pleine) et son approximation par les sommes partielles de sa série de Fourier sur $[-2, 2]$ pour $N = 10$ (courbe en pointillés rouges).



La figure interactive ci-dessous présente une comparaison visuelle entre l'approximation de la série de Fourier d'une fonction mathématique et la fonction linéaire $f(x) = x^2$, tracée sur l'intervalle $[-2, 2]$. L'approximation de la série de Fourier, représentée par une ligne en pointillés bleus, illustre la manière dont une fonction peut être représentée comme une somme de fonctions sinusoïdales plus simples. Le nombre de termes inclus dans l'approximation de la série de Fourier peut être ajusté dynamiquement à l'aide d'un curseur interactif, allant de 1 à 10 termes. Cette caractéristique permet d'observer l'impact de l'augmentation du nombre de termes de la série sur la précision de l'approximation de la fonction réelle. La fonction $f(x) = x^2$ est représentée par une ligne pleine rouge pour référence.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=281

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=281

Section 7.2 Exercices

1. Trouve la série de Fourier pour f sur l'intervalle donné.

$$f(x) = 4x, [-1, 1]$$

Afficher/Masquer la réponse

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x)$$

2. Trouve la série de Fourier pour f sur l'intervalle donné.

$$f(x) = 1 - x^2, [-1, 1]$$

Afficher/Masquer la réponse

$$f(x) = \frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

7.3 ÉQUATION DE LA CHALEUR

A. Introduction à la résolution d'équations différentielles partielles

Cette section aborde la méthode de séparation des variables pour résoudre des équations différentielles partielles couramment rencontrées en physique mathématique, telles que les équations de la chaleur et des ondes. Cette méthode simplifie les équations différentielles partielles complexes en équations différentielles ordinaires plus faciles à gérer. Bien que les algorithmes informatiques tels que les différences finies et les éléments finis soient fréquemment employés pour résoudre des équations différentielles partielles, leur précision peut être difficile à évaluer. C'est pourquoi la méthode analytique de séparation des variables est importante pour vérifier les résultats de ces méthodes de calcul.

B. Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur décrit la diffusion de la chaleur dans un milieu au fil du temps. Elle est formulée en considérant un élément de petit volume à l'intérieur du matériau, où le taux de variation d'énergie thermique est égal au flux de chaleur net. En représentant la température au point x et à l'instant t par $u(x, t)$, l'équation de la chaleur en une dimension peut être exprimée sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta^2 \nabla^2 u$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ représente le taux de variation de la température dans le temps, β^2 (où β est la diffusivité thermique du matériau) est une constante qui combine la conductivité thermique, la densité et la capacité thermique spécifique du matériau et $\nabla^2 u$ (le laplacien de u) représente la divergence du gradient de température, indiquant comment la température change dans l'espace autour de n'importe quel point. Dans une dimension, comme une simple tige, le laplacien de u est simplifié en $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. L'équation de la chaleur devient donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

Pour résoudre cette équation, il faut définir des conditions aux limites et des conditions initiales. La condition initiale spécifie la distribution de la température dans tout le domaine au moment initial, généralement $t = 0$. Par exemple, pour une tige ou un domaine unidimensionnel similaire, la condition initiale peut être $u(x, 0) = f(x)$, où $f(x)$ décrit la distribution de la température le long de la tige au moment initial.

On considère d'abord les conditions aux limites de Dirichlet pour le flux de chaleur dans une tige uniforme dont les extrémités sont maintenues à une température constante de zéro.

C. Solution de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Dirichlet

Prenons une tige uniforme d'une longueur L dont les deux extrémités sont maintenues à une température nulle constante. L'équation de la chaleur en une dimension est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.3.1}$$

Pour une température nulle aux deux extrémités de la tige, les conditions aux limites sont

$$u(0,t) = 0 \text{ and } u(L,t) = 0$$

La distribution initiale de la température le long de la tige est donnée par

$$u(x,0) = f(x)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, on suppose que la solution peut être écrite comme le produit de deux fonctions, l'une dépendant uniquement de x et l'autre uniquement de t.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

En substituant la forme de la solution dans l'équation de la chaleur, on obtient

$$T'(t)X(x) = \beta^2 X''(x)T(t)$$

En divisant l'équation par $\beta^2 X(x)T(t)$, on trouve

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Cette équation est scindée en deux équations différentielles ordinaires (EDO) parce que le côté gauche dépend uniquement de t et le côté droit uniquement de x. Pour que cette équation soit valable pour toutes les valeurs de x et t, chacun des côtés de l'équation doit être indépendamment égal à une constante. En effet, la seule façon pour qu'une fonction de x soit égale à une fonction de t en toutes circonstances est que les deux soient égales à la même valeur constante. Par conséquent, on définit pour les deux côtés de l'équation une constante négative, notée $-\lambda$, λ devenant ainsi la constante de séparation. Par convention, le signe négatif est ajouté pour simplifier les étapes suivantes.

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

On obtient donc deux EDO distinctes.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

Résolution de l'EDO spatiale

Pour résoudre la partie spatiale de l'équation différentielle ordinaire (EDO), il faut d'abord réarranger l'équation

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$u(0,t) = 0 \text{ and } u(L,t) = 0$$

$X(x) = 0$ est la solution triviale à ce problème de conditions aux limites. Toutefois, nous nous intéressons ici aux solutions non triviales, car elles fournissent des indications utiles sur le comportement du système dans diverses conditions. Une valeur de λ pour laquelle ce problème a une solution non triviale est appelée **valeur propre** du problème et les solutions son triviales sont les **fonctions propres** associées à ce λ. Ces fonctions propres, contrairement à la solution triviale, permettent de mieux comprendre la dynamique et les caractéristiques du système.

Trouver les valeurs propres et les fonctions propres

L'équation caractéristique de l'équation différentielle spatiale est $c(\lambda) = r^2 + \lambda$. En fonction du signe de λ, il y a trois cas à considérer.

Cas n° 1 : $\lambda > 0$

Dans ce cas, les racines de $c(\lambda)$ sont complexes et la solution est

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

En appliquant les premières conditions aux limites $X(0) = 0$, on trouve $c_1 = 0$. En appliquant les deuxièmes conditions aux limites $X(L) = 0$, on obtient l'équation $c_2 \sin(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Pour obtenir une solution non triviale, la fonction sinusoïdale doit elle-même être nulle.

$$\sin(L\sqrt{\lambda}) = 0 \;\rightarrow\; L\sqrt{\lambda} = n\pi \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Par conséquent, les valeurs propres positives et leurs fonctions propres associées de ce problème aux limites sont

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{et} \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cas n° 2 : $\lambda = 0$

En ce cas, la solution générale de l'équation différentielle est

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

En appliquant les premières conditions aux limites $X(0) = 0$, on trouve $c_1 = 0$. En appliquant les deuxièmes conditions aux limites $X(L) = 0$, on obtient $c_2 = 0$. Dans ce cas, la seule solution est la solution triviale, qui est rejetée.

Cas n° 3 : $\lambda < 0$

Dans ce cas, les racines de $c(\lambda)$ sont un nombre réel, ce qui donne la solution

$$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$$

En appliquant les premières conditions aux limites $X(0) = 0$, on trouve $c_1 + c_2 = 0$. Les deuxièmes conditions aux limites $X(L) = 0$ donnent $c_1 e^{-L\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{L\sqrt{\lambda}} = 0$. En résolvant le système pour c_1 et c_2, on obtient

$$c_2 \left(e^{L\sqrt{\lambda}} - e^{-L\sqrt{\lambda}} \right) = 0$$

Comme on cherche une solution non triviale, le terme entre parenthèses doit être nul.

$$e^{L\sqrt{\lambda}} - e^{-L\sqrt{\lambda}} = 0$$

Cependant, cette équation n'est valable que si $\lambda = 0$, ce qui contredit notre hypothèse <img src= »https://ecampusontario.pressbooks.pub/app/uploads/sites/4139/2024/03/79708daaf98b414553609f83fdd1f624.png » alt= »lambda<0″ title= »lambda. On conclut donc que c_2 doit être égal à zéro, ce qui donne une solution triviale.

Par conséquent, les seules valeurs et fonctions propres valables pour la partie spatiale de l'équation sont réalisées lorsque $\lambda > 0$. Elles sont données par

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{et} \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Résolution de l'EDO temporelle

Pour résoudre la partie temporelle de l'équation différentielle ordinaire (EDO), il faut d'abord réarranger l'équation

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

et substituer les valeurs propres précédemment déterminées $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, ce qui transforme l'EDO temporelle en

$$T'(t) + \beta^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0$$

Pour chaque valeur propre λ_n, la solution à cette équation différentielle est

$$T_n(t) = ce^{-\beta^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

où c représente une constante arbitraire. La série de fonctions $T_n(t)$ décrit l'évolution de la température dans le temps pour chaque mode spatial n.

Construction de la solution générale

Pour construire la solution générale de l'équation de la chaleur, on combine la solution spatiale et la solution temporelle en une série composite.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Étant donné les solutions $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ et $T_n(t) = ce^{-\beta^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$, la forme combinée pour chaque mode n est

$$u(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\beta^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Notée en série, elle devient

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\beta^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad \textbf{(7.3.2)}$$

où la constante c de la solution temporelle est représentée par B_n pour chaque n, car cette constante peut varier avec chaque terme de la série. Pour trouver le coefficient B_n, on applique la condition initiale $u(x,0) = f(x)$. Ce qui donne

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Il s'agit de la représentation en série sinusoïdale de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$. Les coefficients B_n sont déterminés par

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{7.3.3}$$

Exemple 7.3.1 : Résoudre un problème de valeur initiale aux limites pour l'équation de la chaleur – Conditions aux limites de Dirichlet

Trouver la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant un flux thermique

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\ ,\ 0 < x < \pi,\ t > 0\\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0\ ,\ t > 0\\ u(x, 0) = 6\sin(x) + 7\sin(5x)\end{gathered}$$

Afficher/Masquer la solution

En comparant l'équation différentielle partielle à l'équation de la section 7.3.1, on observe que $\beta^2 = 5$ et $L = \pi$. Étant donné que la condition initiale est une combinaison linéaire de quelques fonctions sinusoïdales (fonctions propres), il suffit simplement de trouver la combinaison de termes dans la solution générale de la section 7.3.2 satisfaisant la condition initiale $u(x, 0)$.

$$u(x, 0) = 6\sin(x) + 7\sin(5x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)e^0 = 6\sin(x) + 7\sin(5x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = 6\sin(x) + 7\sin(5x)$$

D'après l'argument des fonctions sinus, les deux termes correspondent respectivement à $n = 1$ et $n = 5$. De même, $B_1 = 6$ et $B_5 = 7$. Tous les autres coefficients sont nuls.

La solution du problème de flux thermique est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\beta^2 (n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,t) = B_1 e^{-5((1)\pi/\pi)^2 t} \sin\left(\frac{(1)\pi x}{\pi}\right) + B_5 e^{-5((5)\pi/\pi)^2 t} \sin\left(\frac{(5)\pi x}{\pi}\right)$$

$$u(x,t) = 6e^{-5t} \sin(x) + 7e^{-125t} \sin(5x)$$

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=283

Exemple 7.3.2 : Résoudre un problème de valeur initiale aux limites pour l'équation de la chaleur – Conditions aux limites de Dirichlet

Trouver la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant un flux thermique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ ,\ 0 < x < 4,\ t > 0$$
$$u(0,t) = u(4,t) = 0\ ,\ t > 0$$
$$u(x,0) = x$$

Afficher/Masquer la solution

En comparant l'équation à l'équation 7.3.1, on observe que $\beta = 3, L = 4$ et $f(x) = x$. Contrairement à l'exemple précédent, la fonction de condition initiale n'est pas similaire aux fonctions propres (fonctions sinusoïdales). Par conséquent, il faut d'abord trouver B_n avec l'équation 7.3.3.

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$B_n = \frac{2}{4}\int_0^4 x\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx$$

Avec l'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} B_n &= \left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_0^4 + \frac{2}{n\pi}\int_0^4 \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \\ &= -\frac{8}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin(n\pi) \\ &= (-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi} \end{aligned}$$

La solution est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\beta^2 (n\pi/L)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-9(n\pi/4)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$$

La figure ci-dessous montre la somme partielle de la solution $u(x,t)$.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=283

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=283

D. Solution de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Neumann

Les conditions aux limites de Neumann spécifient la valeur de la dérivée (gradient) de la température à la limite, représentant souvent des surfaces isolées ou adiabatiques où il n'y a pas de flux de chaleur. Par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ peut représenter une extrémité de la tige parfaitement isolée.

Pour développer une solution pour l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Neumann, on utilise la méthode de séparation des variables.

Prenons une tige uniforme de longueur L dont les deux extrémités sont parfaitement isolées (aucun flux de chaleur n'entre dans la tige ou n'en sort) et dont la température aux deux extrémités est maintenue constante. L'équation de la chaleur en une dimension est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Pour les extrémités isolées, la dérivée (gradient) de la température à la limite est zéro. Les conditions aux limites de Neumann sont donc

$$u_x(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u_x(L,t) = 0$$

La distribution initiale de la température le long de la tige est donnée par

$$u(x,0) = f(x)$$

La solution de ce problème aux limites est

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\beta^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{7.3.4}$$

où

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

est la série cosinusoïdale de Fourier de $f(x)$ sur $[0, L]$ et les coefficients A_0 et A_n sont donnés par

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \tag{7.3.5}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.3.6}$$

Exemple 7.3.3 : Résoudre un problème de valeur initiale aux limites pour l'équation de la chaleur – Conditions aux limites de Neumann

Trouver la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant un flux thermique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ , \quad 0 < x < 2,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0\ , \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 5x^2,$$

Afficher/Masquer la solution

En comparant l'équation à l'équation 7.3.1, on observe que $\beta = 2$, $L = 2$ et $f(x) = 5x^2$. Il faut d'abord trouver les coefficients A_0 et A_n. On utilise l'équation de la section 7.3.5.

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 5x^2 dx = \frac{5}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{20}{3}$$

On applique l'équation de la section 7.3.6 pour trouver A_n.

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$A_n = \int_0^2 5x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

Avec l'intégration par parties, on a

$$= \left[\frac{10x^2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{20}{n\pi}\int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{10x^2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{80}{(n\pi)^3}\left(\frac{-n\pi}{2} x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{80}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)$$

Étant donné que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, A_n est simplifié en

$$A_n = \frac{80(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

La solution générale est donc donnée par l'équation de la section 7.3.4

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\beta^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$= \frac{20}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{80(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-4\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}$$

La figure ci-dessous montre la somme partielle de la solution $u(x, t)$.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=283

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=283

Section 7.3 Exercices

1. Trouver la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant un flux thermique

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 6,\ 0 \leq x \leq 3\end{gathered}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) e^{-5\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2 t}$$

2. Trouver la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant un flux thermique

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \ t > 0 \\ u(x,0) = -2\sin(4x) - 7\sin(5x),\end{gathered}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$u(x,t) = -2e^{-32t}\sin(4x) - 7e^{-50t}\sin(5x)$$

3. Trouver la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant un flux thermique

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ 0 < x < 3,\ t > 0\\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0,\ \ t > 0\\ u(x,0) = 5x^2,\ 0 \le x \le 3\end{gathered}$$

Afficher/Masquer la réponse

$$u(x,t) = 15 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{180(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)e^{-6\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2 t}$$

7.4 ÉQUATION DES ONDES

L'équation des ondes modélise la propagation des ondes, telles que les ondes sonores, les ondes lumineuses ou les ondes aquatiques, à travers un milieu. Elle rend compte de la façon dont ces ondes se déplacent et changent dans le temps et dans l'espace. L'équation des ondes pour le problème de valeur initiale aux limites portant sur le déplacement (déflexion) d'une corde qui vibre et dont les extrémités sont maintenues fixes est

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ ,\ \ 0 < x < L,\ \ t > 0\\ u(0,t) = u(L,t) = 0\ ,\quad t > 0\\ u(x,0) = f(x)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\ ,\end{gathered} \tag{7.4.1}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, on trouve la solution formelle de ce problème de valeur initiale aux limites :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right) + \frac{B_n L}{n\pi\alpha}\sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{7.4.2}$$

où

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

sont les séries sinusoïdales de Fourier de $f(x)$ et $g(x)$ sur $[0, L]$ et

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \text{ et } B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Exemple 7.4.1 : Trouver la solution du problème de conditions limites – Équation des ondes

Trouver la solution au problème de la corde qui vibre

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ ,\quad 0 < x < \pi, t > 0\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\quad t > 0\\ u(x,0) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(5x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(4x) + 2\sin(6x)\ ,\end{gathered}$$

Afficher/Masquer la solution

En comparant l'équation à l'équation 7.4.1, on observe que $\alpha = 2, L = \pi,$

$f(x) = \sin(3x) - \dfrac{1}{2}\sin(5x)$ et que $g(x) = \sin(4x) + 2\sin(6x)$. Comme f et g sont exprimés en termes de fonctions sinusoïdales, il est possible de déterminer les valeurs des coefficients A_n et B_n en transformant f et g en $u(x, 0)$ et $u_t(x, 0)$, respectivement.

En remplaçant $t = 0$ dans l'équation 7.4.2, on obtient

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(0) + \frac{B_n}{2n}\sin(0)\right)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx)$$

À partir des valeurs initiales aux limites, on a

$$u(x, 0) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(5x)$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(5x)$$

En égalisant les coefficients des termes similaires, on constate que

$$A_3 = 1, \text{ et } A_5 = -\frac{1}{2}$$

tandis que les coefficients restants sont nuls. De même, en différenciant partiellement l'équation de la section 7.4.2 par rapport à t et en substituant $t = 0$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-2nA_n\sin(2nt) + B_n\cos(2nt))\sin(nx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-2nA_n\sin(0) + B_n\cos(0))\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin(nx)$$

À partir des valeurs initiales aux limites, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(4x) + 2\sin(6x)$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin(nx) = \sin(4x) + 2\sin(6x)$$

En égalisant les coefficients des termes similaires, on constate que

$$B_4 = 1, \text{ et } B_6 = 2$$

tandis que les coefficients restants sont nuls.

La solution du problème est donc

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(2nt) + \frac{B_n}{2n}\sin(2nt)\right)\sin(nx)$$

$$u(x,t) = \cos(6t)\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(8t)\sin(4x)$$
$$-\frac{1}{2}\cos(10t)\sin(5x) + \frac{1}{6}\sin(12t)\sin(6x)$$

La figure représente $u(x,t)$ sous forme schématique.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=285

Prenons un exemple

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez les consulter en ligne ici : https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=285

Section 7.4 Exercices

1. Trouve la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = -\sin(x) + 3\sin(7x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\sin(4x) + \sin(10x)$$
$$0 \leq x \leq \pi$$

Afficher/Masquer la réponse

$$u(x,t) = -\cos(3t)\sin(x) - \frac{1}{6}\sin(12t)\sin(4x) +$$
$$3\cos(21t)\sin(7x) + \frac{1}{30}\sin(30t)\sin(10x)$$

2. Trouve la solution au problème de valeur initiale aux limites décrivant des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = -\sin(x) + 3\sin(3x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -4\sin(2x) + 3\sin(6x)$$
$$0 \leq x \leq \pi$$

Afficher/Masquer la réponse

$$u(x,t) = -\cos(2t)\sin(x) - \sin(4t)\sin(2x) +$$
$$3\cos(6t)\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(12t)\sin(6x)$$

ANNEXE

Simulations

Série de Fourier

Faites la simulation suivante pour voir comment les sinus et les cosinus s'ajoutent pour produire des fonctions périodiques arbitraires.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez le consulter en ligne ici :
https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=6#iframe-phet-1

Système masse-ressort

Faites la simulation suivante de système masse-ressort pour étudier la relation entre les vecteurs vitesse et accélération, ainsi que leur relation avec le mouvement, à différents points de l'oscillation avec et sans amortissement et pour en apprendre plus sur les facteurs qui ont une incidence sur la période d'oscillation.

Un ou plusieurs éléments interactifs ont été exclus de cette version du texte. Vous pouvez le consulter en ligne ici :
https://ecampusontario.pressbooks.pub/diffeq/?p=6#iframe-phet-2

BIBLIOGRAPHIE

Hayt, W. H., Jr., Kemmerly, J. E. et Durbin, S. M. (2007). *Engineering circuit analysis* (7e éd.). McGraw-Hill Higher Education.

Meriam, J. L., Kraige, L. G. et Bolton, J. N. (2020). *Engineering mechanics: Dynamics* (8e éd.). John Wiley & Sons Ltd.

Nagle, R. K., Saff, E. B. et Snider, A. D. (2018). *Fundamentals of differential equations* (9e éd.). Pearson.

Rao, S. S. (2017). *Mechanical vibrations* (6e éd.). Pearson.

Trench, W. F. (2013). *Elementary differential equations with boundary value problems*. https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Elementary_Differential_Equations_with_Boundary_Value_Problems_(Trench)