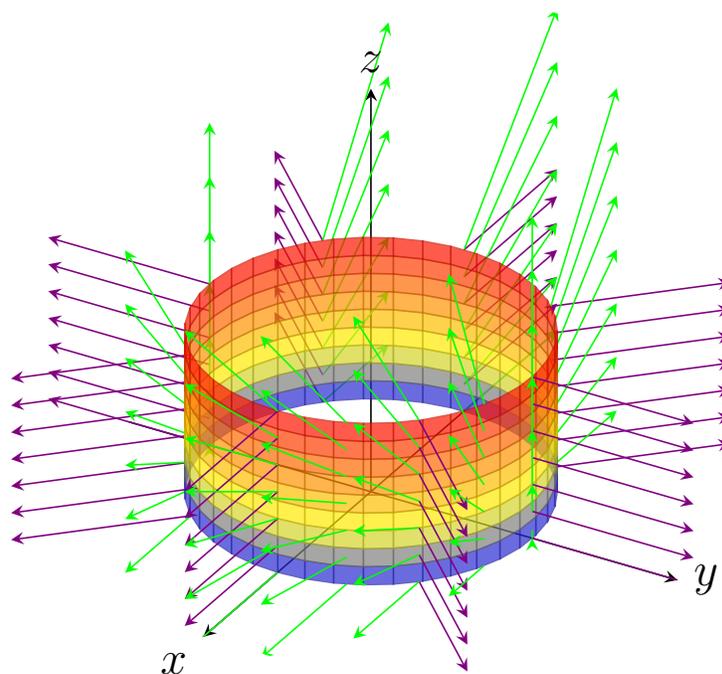


Calcul différentiel de plusieurs variables

MAT 2522



ALISTAIR SAVAGE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ D'OTTAWA

Traduit en français par Abdelkrim El Basraoui avec l'aide des traducteurs automatiques
DeepL et PolyMath.

Cette œuvre est placée sous une licence
[Attribution - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

Contenu

Preface	4
1 Dérivées partielles et différentielles	6
1.1 Ensembles ouverts et frontières	6
1.2 Limites	9
1.3 Fonctions affines	13
1.4 Approximations affines en une ou deux variables	14
1.5 La différentielle	17
1.6 Règles de différentiation	22
1.7 Chemins, courbes et surfaces	24
1.8 Dérivées directionnelles	27
1.9 Dérivées d'ordre supérieur	30
1.10 Théorème de Taylor	33
1.11 Le théorème des fonctions implicites	36
1.12 Théorème de la fonction inverse	41
2 Extréma	44
2.1 Valeurs maximales et minimales	44
2.2 Test de la dérivée seconde	48
2.3 Extréma sous contrainte(s)	52
2.4 Multiplicateurs de Lagrange	53
2.5 Contraintes multiples	57
2.6 Comment trouver les extrema globaux	59
3 Intégrales doubles et triples	64
3.1 Sections verticales	64
3.2 Sections horizontales	68
3.3 Intégrales doubles sur un rectangle	71
3.4 Le théorème de Fubini	74
3.5 Intégrales doubles sur des régions plus générales	76
3.6 Exemples et applications des intégrales doubles	79
3.7 Intégrales triples	85

4	Le changement de variables	91
4.1	Cas de deux variables	91
4.2	Les coordonnées polaires	96
4.3	Trois variables	98
4.4	Les coordonnées cylindriques	99
4.5	Les coordonnées sphériques	101
5	Champs vectoriels	104
5.1	Définitions et premiers exemples	104
5.2	Champs vectoriels conservatifs	107
5.3	Le rotationnel	109
6	Intégrales curvilignes	114
6.1	Intégrales curvilignes de champs scalaires	114
6.2	Intégrales curvilignes de champs vectoriels	118
6.3	Reparamétrisation	120
6.4	Intégrales curvilignes de champs conservatifs	122
6.5	L'indépendance des chemins	126
7	Intégrales de surfaces	130
7.1	Surfaces paramétrées	130
7.2	Plans tangents	131
7.3	Aire de surfaces	134
7.4	Intégrales de fonctions scalaires sur des surfaces	137
7.5	Centre de masse et moment d'inertie	140
7.6	Intégrales de surfaces de champs vectoriels	144
7.7	Reparamétrisation et orientation	148
8	Théorèmes d'intégration	152
8.1	Gradient, divergence et rotationnel.	152
8.2	Théorème de la divergence	159
8.3	Le théorème de Green	165
8.4	Théorème de Stokes	171

Préface

Ces notes sont celles du cours *Multivariable calculus* (MAT 2122) à l'Université d'Ottawa. Ce cours sur le calcul en dimensions multiples s'adresse aux étudiants qui se spécialisent en mathématiques ou qui suivent un programme conjoint avec un autre sujet. Nous nous pencherons principalement sur les fonctions à valeurs réelles à entrées multiples à valeurs réelles. De nombreux concepts seront discutés en utilisant le langage des vecteurs et de l'algèbre linéaire, puisque c'est le cadre le plus naturel pour le calcul à plusieurs variables. Nous verrons comment une grande partie du calcul que vous avez appris dans les cours précédents se généralise en dimensions multiples. Cela nous permettra d'explorer des mathématiques nouvelles et intéressantes, comme l'intégration sur des surfaces et des régions tridimensionnelles.

Remerciements: Je tiens à remercier [Aaron Tikuisis](#) et [Tanya Schmah](#) d'avoir partagé avec moi leurs notes pour ce cours, sur lesquelles des parties de ces notes sont basées. Les manuels officiels de ce cours sont les livres en libre accès [[FRYc](#)] et [[FRYe](#)]. Certaines parties de ces notes suivent ces manuels.

[Alistair Savage](#)

Site web du cours: <https://alistairsavage.ca/mat2122>

Conventions

On utilisera les conventions suivantes dans ce document :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs.
- \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels.
- On désignera les vecteurs par des lettres en gras, comme $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Comme les caractères gras peuvent être difficiles à écrire à la main (par exemple, pendant les cours), on indiquera parfois les vecteurs avec une petite flèche en haut, par exemple, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, lorsqu'on écrit à la main.

On écrira les vecteurs dans \mathbb{R}^n horizontalement de la manière suivante

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \tag{1}$$

ou comme matrices en une colonne

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{2}$$

de manière interchangeable. Notez que la (1) *n'est pas* la même chose que la matrice en une ligne

$$[x_1 \quad \cdots \quad x_n].$$

Au contraire, (1) est juste une notation écrite horizontalement (pour gagner de la place) pour une matrice en une colonne (2). On écrira

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

pour la norme d'un vecteur. Notez que certains manuels, y compris [FRYe], utilisent la notation $|\mathbf{x}|$ pour cette norme.

Exercices

La plupart des sections sont suivies d'une liste d'exercices. Certains exercices sont inscrits directement dans ce document, mais la plupart font référence aux exercices des manuels de cours. Parfois, la liste d'exercices est assez longue, mais beaucoup de ces exercices sont similaires. Dans ce cas, vous devriez en faire une sélection, suffisamment pour vous sentir à l'aise avec ce type de questions. *Faire des exercices est la meilleure façon d'apprendre la matière !*

Chapitre 1

Dérivées partielles et différentielles

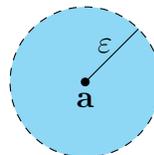
Dans ce premier chapitre, nous abordons la dérivation en dimensions supérieures. Certains résultats est une revue de cours préalables, tandis que d'autres seront nouveaux.

1.1 Ensembles ouverts et frontières

De nombreuses définitions en calcul différentiel nécessitent que l'on fasse l'étude «près» d'un point. La formulation précise de ces concepts nécessite la notion d'ensembles ouverts, que nous aborderons ici.

Définition 1.1.1 (Boule ouverte). Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. La *boule ouverte* de rayon ε et centre \mathbf{a} est

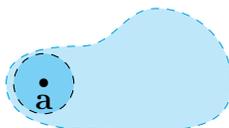
$$B_\varepsilon(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}.$$



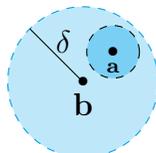
Définition 1.1.2 (Ensembles ouverts). Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *ouvert* si

$$\forall \mathbf{a} \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subseteq A.$$

En d'autres termes, A est ouvert si chaque point de A est le centre d'une boule ouverte contenue dans A .



Exemple 1.1.3. Toute boule ouverte est un ensemble ouvert. Prouvons-le ! Soient $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. Nous allons montrer que $A = B_\delta(\mathbf{b})$ est un ensemble ouvert. Soit $\mathbf{a} \in A$. Nous devons trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subseteq A$.



Puisque $\mathbf{a} \in A = B_\delta(\mathbf{b})$, on a $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \delta$. Soit

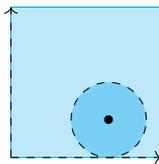
$$\varepsilon = \delta - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| > 0.$$

Alors, pour tout $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{a})$, on a $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$, et ainsi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &< \varepsilon + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \\ &= \delta - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Donc $x \in B_\delta(\mathbf{b}) = A$. D'où $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subseteq A$, comme voulu. \triangle

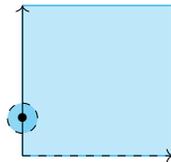
Exemple 1.1.4. L'ensemble $A =]0, \infty[\times]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}^2$ est ouvert. En effet, si $(a, b) \in A$, alors $a, b > 0$. Si on prend $\varepsilon = \min\{a, b\}$, on a donc $B_\varepsilon(a, b) \subseteq A$.



\triangle

Exemple 1.1.5. L'ensemble $A = [0, \infty[\times]0, \infty[$ n'est pas ouvert. Pour le constater, on note que pour tout $b > 0$, on a $(0, b) \in A$. Cependant, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left(-\frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in B_\varepsilon(0, b) \quad \text{mais} \quad \left(-\frac{\varepsilon}{2}, b\right) \notin A.$$



D'où $B_\varepsilon(0, b) \not\subseteq A$. \triangle

Rappelons que, si A et B sont deux ensembles, alors leur *différence* est

$$A \setminus B := \{x : x \in A, x \notin B\}.$$

Définition 1.1.6 (Frontière). Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La *frontière* de A est l'ensemble de tous les points $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tels que

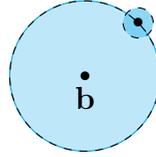
$$\forall \varepsilon > 0 \quad (B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus A \neq \emptyset.)$$

Nous désignons la frontière de A par ∂A .

Notez que la Définition 1.1.6 ne nécessite pas que $\mathbf{a} \in A$.

Remarque 1.1.7. Dans Section 8.4, nous donnerons une définition différente de la frontière pour les surfaces dans \mathbb{R}^3 .

Exemple 1.1.8. Si $A = B_\delta(\mathbf{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$, alors $\partial A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \delta\}$.



Dans ce cas, *aucun* des points de la frontière de A n'est dans A . La boule *fermée* a la même frontière :

$$\partial\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \leq \delta\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \delta\}.$$

Dans ce cas, *tous* les points de la frontière appartiennent à l'ensemble lui-même. △

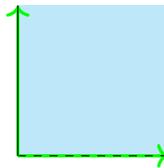
Exemple 1.1.9. Si

$$A = [0, \infty[\times]0, \infty[,$$

alors

$$\partial A = \{(x, 0) : x \geq 0\} \cup \{(0, y) : y \geq 0\}.$$

La frontière est la région colorée en vert dans la figure suivante :



Notez que les ensembles

$$]0, \infty[\times]0, \infty[, \quad]0, \infty[\times [0, \infty[\quad \text{et} \quad]0, \infty[\times [0, \infty[$$

ont tous la même frontière que A . △

Exercices.

1.1.1. Pour chacun des ensembles suivants, indiquez si l'ensemble est ouvert ou non et décrivez sa frontière.

- (a) $[0, 1] \times]0, 1[$.
- (b) $]0, 1[\times]0, 1[$.
- (c) $[0, 1] \times [0, 1]$.
- (d) $\{(x, y) : y \geq x^2\}$.
- (e) $\{(x, y) : y > x^2\}$.
- (f) \mathbb{R}^2 .
- (g) \emptyset .

1.2 Limites

La notion de *limite* est à la base de tout le calcul différentiel et intégral. Dans cette section, nous donnerons une définition précise d'une limite dans le cadre des multivariées, et nous discuterons plusieurs propriétés importantes des limites.

Définition 1.2.1 (Limite). Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in A \cup \partial A$ et $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. On écrit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (\mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \implies \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon.$$

(Notez que la condition $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ est équivalente à la condition $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$).

Remarques 1.2.2. (a) Comme dans le cas d'une seule variable, les limites peuvent ne pas exister. Cependant, si elles existent, elles sont uniques.

(b) Notez que la Définition 1.2.1 permet à \mathbf{a} de se trouver à la limite de A , et n'exige pas que $\mathbf{a} \in A$. Ainsi, dans certaines situations, nous pouvons discuter de la limite d'une fonction en un point qui ne se trouve pas dans le domaine de celle-ci.

En pratique, il suffit de considérer le cas $m = 1$ de la Définition 1.2.1, comme nous l'expliquons maintenant. Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors toute fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ peut s'écrire sous la forme

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \quad \text{où } f_i: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.1)$$

Les f_i sont les *fonctions composantes* de f , et on écrit $f = (f_1, \dots, f_m)$. La proposition suivante affirme que les coordonnées de la limite de f sont les limites de ses fonctions composantes (si toutes celles-ci existent).

Proposition 1.2.3. *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ soit un ensemble ouvert, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a} \in A \cup \partial A$, et $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. Alors*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

En particulier, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ existe si et seulement si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x})$ existe pour chaque i .

Proof. Supposons $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$(\mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \implies \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon.$$

Soit $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Puisque

$$|f_i(\mathbf{x}) - L_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m (f_j(\mathbf{x}) - L_j)^2} = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|,$$

nous avons

$$(\mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \implies |f_i(\mathbf{x}) - L_i| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon.$$

Donc $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i$.

Inversement, supposons que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, il existe $\delta_i > 0$ tel que

$$(\mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_i) \implies |f_i(\mathbf{x}) - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Alors, pour tout $\mathbf{x} \in A$ satisfaisant $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, on a

$$\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (f_j(\mathbf{x}) - L_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$. □

Définition 1.2.4 (Continuité). Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{a} \in A$. On dit que f est *continue en \mathbf{a}* si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine.

Corollaire 1.2.5. *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in A$. Alors f est continu en \mathbf{a} si et seulement si f_i est continu en a_i pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.*

Proof. Ceci découle de la Définition 1.2.4 et la Proposition 1.2.3. □

Remarque 1.2.6. À la lumière de la Proposition 1.2.3 et du Corollaire 1.2.5, nous limiterons souvent notre attention aux fonctions à valeurs réelles $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, lorsque nous discutons des limites et de la continuité. Nous verrons plus tard que nous pouvons également faire cette simplification lors de l'étude des dérivées. Cependant, nous ne pouvons pas faire des simplifications analogues dans le *domaine* d'une fonction. Par exemple, nous verrons que toutes les dérivées partielles d'une fonction peuvent exister, même si la fonction n'est pas différentiable.

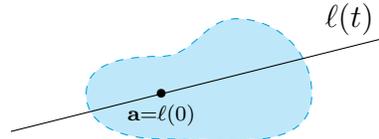
Théorème 1.2.7 (Théorème du Sandwich). *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert, $ba \in A \cup \partial A$, $L \in \mathbb{R}$, et $f, h: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si*

$$|f(\mathbf{x}) - L| \leq h(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x} \in A \text{ et } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = 0,$$

alors $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$.

Proof. La démonstration est très similaire à celle du théorème du sandwich en une variable. Par conséquent, nous l'omettons. □

Proposition 1.2.8. *Supposons que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert, et $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$. Alors, pour toute droite $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\ell(0) = \mathbf{a}$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} f(\ell(t)) = L$.*



Proof. La démonstration de cette proposition est laissée comme un exercice, voir Exercice 1.2.1. □

Avertissement 1.2.9. La réciproque de la Proposition 1.2.8 est fautive ! Il existe des fonctions f telles que $\lim_{t \rightarrow 0} f(\ell(t)) = L$ pour toutes les lignes ℓ , mais $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ n'existe pas. Voir [FRYc, §2.1.1] pour un exemple.

Exemple 1.2.10. Soit

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 5xy + 3y^2}{|x| + |y|}.$$

Est-ce que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe ? Si oui, déterminez-la ? Essayons d'approcher $(0, 0)$ le long de la ligne

$$\ell(t) = (t, 0).$$

Nous avons

$$f(\ell(t)) = f(t, 0) = \frac{t^2 + 5t \cdot 0 + 3 \cdot 0^2}{|t| + |0|} = \frac{t^2}{|t|} = |t|.$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\ell(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0.$$

Par conséquent, par la Proposition 1.2.8, si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe, elle doit être égale à 0.

Prouvons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^2 + 5xy + 3y^2}{|x| + |y|} \right| \leq \frac{|x^2|}{|x| + |y|} + \frac{5|xy|}{|x| + |y|} + \frac{3|y^2|}{|x| + |y|}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \frac{|x^2|}{|x| + |y|} &= \frac{|x| |x|}{|x| + |y|} \leq \frac{|x|(|x| + |y|)}{|x| + |y|} = |x|, \\ \frac{5|xy|}{|x| + |y|} &\leq \frac{5|x|(|x| + |y|)}{|x| + |y|} = 5|x|, \\ \frac{3|y^2|}{|x| + |y|} &\leq \frac{3|y|(|x| + |y|)}{|x| + |y|} = 3|y|. \end{aligned}$$

Donc

$$|f(x, y) - 0| \leq |x| + 5|x| + 3|y| = 6|x| + 3|y|.$$

Puisque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (6|x| + 3|y|) = 0$, on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

selon le théorème du sandwich (Théorème 1.2.7). \triangle

Exemple 1.2.11. Considérons la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Est-ce que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe ? Si oui, déterminez-la ? Essayons de nous approcher de l'origine le long des deux droites des coordonnées x et y . Considérons d'abord $\ell_1(t) = (t, 0)$. Dans ce cas,

$$f(\ell_1(t)) = f(t, 0) = \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = 1.$$

Considérons maintenant $\ell_2(t) = (0, t)$. Alors

$$f(\ell_2(t)) = f(0, t) = \frac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = -1.$$

Ainsi, par la Proposition 1.2.8, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas. \triangle

Nous concluons cette section par quelques propriétés des limites. Les preuves de ces propriétés sont analogues à celles du cas d'une seule variable, nous les omettons alors. Pour le reste de cette section, on conviendra que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, et $\mathbf{a} \in A \cup \partial A$.

Proposition 1.2.12 (Unicité des limites). *Si*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = K \quad \text{et} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L,$$

alors $K = L$.

Proposition 1.2.13 (Arithmétique des limites). *Supposons que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ existent.*

(a) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.

(b) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \right) \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \right)$.

(c) *Si $f(\mathbf{x}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in A$ et $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \neq 0$, alors*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{f(\mathbf{x})} = \frac{1}{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})}.$$

Corollaire 1.2.14. *Si $\mathbf{a} \in A$ et f, g sont deux fonctions continues en \mathbf{a} , alors $f + g$, fg et $\frac{1}{f}$ (si définis) le sont aussi.*

Exercices.

1.2.1. Démontrez la Proposition 1.2.8.

Exercices tirés de [FRYb, §2.1]: Q1–Q11.

1.3 Fonctions affines

Supposons avoir une fonction

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Rappelons qu'en algèbre linéaire, f est *linéaire* si

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(s\mathbf{x}) = sf(\mathbf{x}),$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $s \in \mathbb{R}$. La fonction f est linéaire si et seulement si elle est donnée par une multiplication par une certaine matrice. En d'autres termes, f est linéaire si et seulement s'il existe une matrice A de taille $m \times n$ telle que

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

où nous considérons \mathbf{x} comme une matrice de taille $n \times 1$.

Plus généralement, la fonction f est *affine* si elle est une composition d'une application linéaire et d'une translation. En d'autres termes, f est affine si et seulement s'il existe une matrice A de $m \times n$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Intuitivement, les fonctions linéaires et affines sont toutes deux des applications dont les graphes sont « plats ». Cependant, les graphes des fonctions linéaires doivent passer par l'origine. Notez que si $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur fixe, alors la fonction $\mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{b}$ est également affine, puisque nous avons

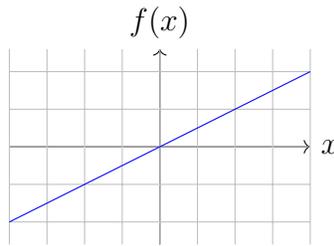
$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{b} = \underbrace{A\mathbf{x}}_{\text{linéaire}} + \underbrace{(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0)}_{\text{translation}}.$$

La plupart des fonctions affines que nous allons voir seront de cette forme.

Exemple 1.3.1. La fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x,$$

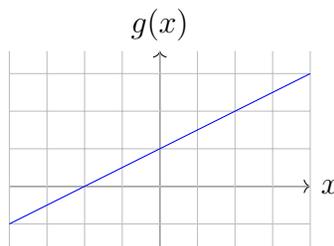
est linéaire. Son graphe est le suivant :



Notez que le graphe de cette fonction passe par l'origine. D'autre part, la fonction

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1,$$

n'est pas linéaire, mais il *est* affine. Son graphe est le suivant :



Notez que le graphe ne passe pas par l'origine. △

Exercices.

1.3.1. Lesquelles des fonctions suivantes sont linéaires et lesquelles sont affines?

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 2x - 7y + 10$
- (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 2(x - 1) + 5(y - 3) + 17$
- (c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y$
- (d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x + 4y, 3x + y, 1)$
- (e) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (z, x)$

1.4 Approximations affines en une ou deux variables

Comme il est beaucoup plus simple de travailler avec des fonctions linéaires et affines qu'avec des fonctions arbitraires (parce que nous pouvons utiliser les outils de l'algèbre linéaire), il est souvent utile d'approcher une fonction près d'un certain point par une fonction affine. C'est ce que vous avez fait dans vos cours de calcul différentiel précédents lorsque vous avez

trouvé des *droites tangentes* et les *plans tangents*. Une droite tangente est le graphe de la fonction affine qui se rapproche le plus d'une fonction donnée $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tandis qu'un plan tangent est le graphe de la fonction affine qui se rapproche le plus d'une fonction donnée $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Notez qu'il est important de se permettre de travailler avec des fonctions *affines*, et pas seulement *linéaires*, puisque la meilleure approximation ne passera pas par l'origine en général.

Rappelons que si $A \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert (par exemple, A est un certain intervalle ouvert (b, c) pour $b < c$), et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, alors la *dérivée* de f en $a \in A$ est

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

si cette limite existe. Si cette limite existe, on dit que f est *différentiable* en a . On dit que f est *différentiable* s'il est différentiable en tout $a \in A$.

Lemme 1.4.1. *La fonction f est différentiable en a avec une dérivée $f'(a)$ si et seulement si*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{|x - a|} = 0. \quad (1.2)$$

Proof. Supposons d'abord que f est différentiable en a avec une dérivée $f'(a)$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{a - x} + f'(a) = -f'(a) + f'(a) = 0.$$

Puisque les deux limites unilatérales existent et sont égales, nous avons prouvé (1.2). La preuve de l'implication inverse est similaire, et donc est laissée comme exercice Exercice 1.5.1. \square

Rappelons que la *droite tangente* à une fonction différentiable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point $(a, f(a))$ est donnée par

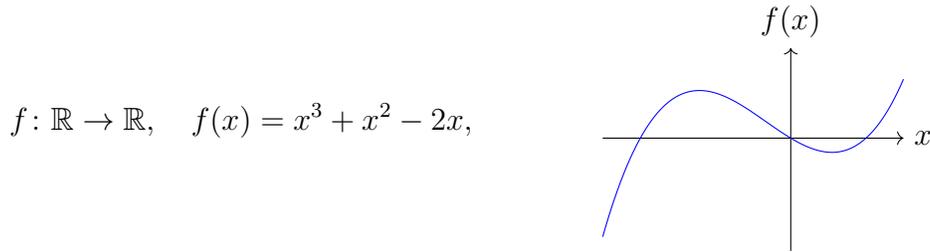
$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \quad (1.3)$$

En d'autres termes, c'est le graphe de la fonction affine

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (1.4)$$

Le Lemme 1.4.1 affirme que cette fonction est la meilleure approximation affine de la fonction $f(x)$ près du point a . Plus précisément, elle indique que la fonction (1.4) est l'unique fonction affine telle que la différence entre elle et $f(x)$ (l'« erreur ») tend vers zéro plus vite que $|x - a|$.

Exemple 1.4.2. Pour nous rafraîchir la mémoire, trouvons la droite tangente à la fonction



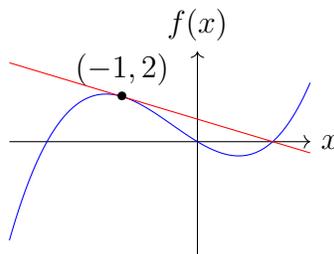
au point $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$. Nous calculons d'abord la dérivée :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2, \quad \text{et donc} \quad f'(-1) = -1.$$

La droite tangente au graphe de f au point $(-1, 2)$ est donc donnée par

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + 2 = (-1)(x + 1) + 2 = 1 - x.$$

À partir du traçage de la droite tangente,



on voit que c'est le graphe d'une fonction affine. En particulier, c'est le graphe de la fonction affine

$$g(x) = -x + 1. \quad \triangle$$

Considérons maintenant le cas de *deux* variables. Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est ouvert et que l'on a une fonction différentiable $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. (Nous reviendrons bientôt sur la définition précise d'une fonction différentiable dans le cas de plusieurs variables). Rappelez-vous que le *plan tangent* au graphe de f au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ est donné par

$$\begin{aligned} z &= f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2) + f(a_1, a_2) \\ &= \nabla f(a_1, a_2) \cdot (x - a_1, y - a_2) + f(a_1, a_2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1.6)$$

sont les *dérivées partielles* de f ,

$$\nabla f = (f_x, f_y) \quad (1.7)$$

est le *gradient* de f , et \cdot désigne le produit scalaire.

Exemple 1.4.3. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + xy - y^2 + 4.$$

Supposons que nous voulions trouver l'équation du plan tangent au graphe de f (c'est-à-dire la surface $z = f(x, y)$) au point $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 3)$. On calcule alors

$$f_x = 3x^2 + y, \quad f_y = x - 2y.$$

Ainsi, l'équation du plan tangent est

$$z = f_x(0, 1)(x - 0) + f_y(0, 1)(y - 1) + f(0, 1) = x - 2(y - 1) + 3 = x - 2y + 5. \quad \triangle$$

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §2.5]: Q5–Q7, Q10.

1.5 La différentielle

Nous aimerions utiliser nos connaissances en algèbre linéaire pour unifier et généraliser la théorie ci-dessus concernant la recherche de la meilleure approximation affine d'une fonction différentiable. Supposons que nous ayons une fonction

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Il est maintenant pratique d'utiliser la notation x_1, \dots, x_n pour les variables indépendantes et y_1, \dots, y_m pour les variables de dépendantes. En utilisant la notation vectorielle, nous définissons $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, et

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

Fixons un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et notons $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$. On définit alors

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}, \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{b}.$$

Notez que \mathbf{a} (et donc \mathbf{b}) sont des points *fixes*, \mathbf{x} est notre variable, et \mathbf{y} varie en fonction de \mathbf{x} , selon l'équation $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

Avec notre nouvelle notation, (1.3) devient

$$\Delta \mathbf{y} = f'(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{x} \tag{1.8}$$

et (1.5) devient

$$\Delta \mathbf{y} = f_x(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + f_y(\mathbf{a})(x_2 - a_2) = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}, \tag{1.9}$$

où le côté droit implique une multiplication matricielle. Il s'agit bien sûr des cas où $m = 1$ et $n = 1$ ou $n = 2$, respectivement. On peut maintenant deviner la forme générale.

Définition 1.5.1 (Fonction différentiable). Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{a} \in A$. On dit que f est *différentiable* en \mathbf{a} s'il existe une application linéaire $Df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0. \quad (1.10)$$

Si cette limite existe, alors $Df(\mathbf{a})$ est appelée la *différentielle* de f en \mathbf{a} .

Comment trouver la différentielle en pratique ? Comme nous l'avons noté dans (1.1), toute fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ peut être écrite sous la forme

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \quad \text{où } f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ for } i = 1, 2, \dots, m.$$

Si toutes les dérivées partielles des fonctions composantes f_i existent, alors la *matrice jacobienne*, ou *matrice des dérivées partielles* de f en un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est la matrice $m \times n$

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Théorème 1.5.2. *Si f est différentiable en \mathbf{a} , alors sa différentielle est l'application linéaire correspondant à sa matrice jacobienne (c'est-à-dire l'application linéaire donnée par la multiplication à gauche par la matrice jacobienne).*

Nous ne prouverons pas le Théorème 1.5.2 en classe, car la preuve est un peu longue et technique. Comme en algèbre linéaire, nous identifions souvent une matrice et l'application linéaire correspondante. Ainsi, le Théorème 1.5.2 affirme que, si f est différentiable en \mathbf{a} , alors

$$Df(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Comme nous le verrons dans Théorème 1.5.12, il est possible que la matrice jacobienne existe (c'est-à-dire que les dérivées partielles de toutes les fonctions composantes de f existent), mais que la fonction *n'est pas* différentiable. Cependant, nous utiliserons toujours la notation $Df(\mathbf{a})$ pour la matrice jacobienne dans ce cas.

La Définition 1.5.1 indique que, si $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ pour $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, alors la meilleure approximation affine de f au point $\mathbf{a} \in A$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y} &= Df(\mathbf{a})\Delta \mathbf{x}, & \text{où} & & (1.11) \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{y} - \mathbf{b} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) & \text{et} & & \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Notez que, lorsque $n = m = 1$, alors (1.11) devient (1.8), décrivant ainsi la droite tangente. Par contre, lorsque $n = 2$, $m = 1$, l'équation (1.11) devient (1.9), décrivant donc le plan tangent. Dans les dimensions supérieures, nous appelons l'approximation affine un *hyperplan*.

Remarque 1.5.3. Certaines références utilisent le terme *approximation linéaire* au lieu de *approximation affine*. Cependant, le terme *approximation affine* est plus courant.

Lorsque $m = 1$, nous considérons alors les fonctions

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Le *gradient* d'une telle fonction est

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \quad (1.12)$$

(Lorsque $n = 2$, cela correspond à (1.7).) Dans ce cas (c'est-à-dire lorsque $m = 1$), la différentielle $Df(\mathbf{a})$ est la transposée $\nabla^T f(\mathbf{a})$ du gradient $\nabla f(\mathbf{a})$ en \mathbf{a} . Alors (1.10) devient

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0. \quad (1.13)$$

En fait, en utilisant le théorème du sandwich (Théorème 1.2.7), nous pouvons supprimer la valeur absolue au numérateur, si nous le souhaitons. En d'autres termes, f est différentiable si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0. \quad (1.14)$$

Exemple 1.5.4. Considérez la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3xy^2.$$

On a

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3y^2, 6xy), \quad \nabla f(2, 1) = (3, 12).$$

Donc

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{f(x, y) - f(2, 1) - \nabla f(2, 1) \cdot (x - 2, y - 1)}{\|(x, y) - (2, 1)\|} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{3xy^2 - 6 - 3(x - 2) - 12(y - 1)}{\|(x - 2, y - 1)\|} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{3xy^2 - 3x - 12y + 12}{\|(x - 2, y - 1)\|}. \end{aligned}$$

En prenant $w = x - 2$, $z = y - 1$, cette limite est égale à

$$\lim_{(w,z) \rightarrow (0,0)} \frac{3(w+2)(z+1)^2 - 3(w+2) - 12(z+1) + 12}{\|(w, z)\|} = \lim_{(w,z) \rightarrow (0,0)} \frac{3wz^2 + 6z^2 + 6wz}{\sqrt{w^2 + z^2}}.$$

Ensuite, puisque $|z| = \sqrt{z^2} \leq \sqrt{w^2 + z^2}$, nous avons

$$\left| \frac{3wz^2 + 6z^2 + 6wz}{\sqrt{w^2 + z^2}} \right| = \frac{|z|}{\sqrt{w^2 + z^2}} |3wz + 6z + 6w| \leq |3wz + 6z + 6w| \rightarrow 0$$

lorsque $(w, z) \rightarrow (0, 0)$. Ainsi, f est différentiable en $(2, 1)$ avec différentielle

$$Df(2, 1) = \nabla^T f(2, 1) = [3 \quad 12]$$

et le plan tangent au graphe de f au point $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, 6)$ est donné par

$$z = f(2, 1) + \nabla(f) \cdot (x - 2, y - 1) = 6 + (3, 12) \cdot (x - 2, y - 1) = 3x + 12y - 12. \quad \triangle$$

Remarquez que, dans l'Exemple 1.5.4, il était assez facile de calculer le gradient ∇f , mais qu'il fallait ensuite prouver que la fonction f était différentiable. Ce serait bien s'il y avait un moyen plus facile de voir qu'une fonction est différentiable, au moins pour une grande classe de fonctions. En effet, il existe un moyen, comme nous l'expliquons dans la suite de cet ouvrage.

Tout d'abord, comme nous l'avons vu pour les limites, nous pouvons en fait toujours réduire notre attention au cas $m = 1$, comme le précise la proposition suivante.

Proposition 1.5.5. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{a} \in A$. Alors f est différentiable en \mathbf{a} si et seulement si chaque fonction composante f_i , $1 \leq i \leq m$, est différentiable en \mathbf{a} . Dans ce cas, on a*

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \nabla^\top f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla^\top f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

où $\nabla^\top f_i(\mathbf{a})$ est la transposée du gradient $\nabla f_i(\mathbf{a})$.

Proof. Ceci découle de la Définition 1.5.1 et la Proposition 1.2.3. □

Le théorème suivant (dont nous omettons la preuve) est très utile pour montrer que des fonctions sont différentiables.

Théorème 1.5.6. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, et $\mathbf{a} \in A$. Si toutes les dérivées partielles de f sont continues en \mathbf{a} , alors f est différentiable en \mathbf{a} .*

Corollaire 1.5.7. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{a} \in A$. Si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, sont continues en \mathbf{a} , alors f est différentiable en \mathbf{a} .*

Proof. Ceci découle de la Proposition 1.5.5 et le Théorème 1.5.6. □

Exemple 1.5.8. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 e^{x_2}, x_1^3 - x_2 \cos(x_3)).$$

Les fonctions composantes sont

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_2}, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - x_2 \cos(x_3),$$

qui sont toutes des fonctions différentiables. La différentielle est

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x_2} & x_1 e^{x_2} & 0 \\ 3x_1^2 & -\cos(x_3) & x_2 \sin(x_3) \end{bmatrix}.$$

Puisque toutes les dérivées partielles sont continues, la fonction f est différentiable en tout point de \mathbb{R}^3 d'après le Théorème 1.5.6.

Si $\mathbf{a} = (2, 0, \pi)$, nous avons

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $f(\mathbf{a}) = (2, 8)$, la meilleure approximation affine de f en \mathbf{a} est alors

$$\mathbf{y} - (2, 8) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \\ x_3 - \pi \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 + (x_1 - 2) + 2x_2 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 &= 8 + 12(x_1 - 2) + x_2 = 12x_1 + x_2 - 16. \end{aligned}$$

Comme le graphe de f appartient à l'espace à cinq dimensions, nous ne sommes pas en mesure de le visualiser comme nous pouvons le faire pour les droites tangentes et les plans tangents. Néanmoins, nous avons pu donner une description algébrique de cette approximation. \triangle

Avertissement 1.5.9. La réciproque du Théorème 1.5.6 est fautive (même pour les fonctions à une variable), comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.5.10. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

d'après le théorème du sandwich (puisque $|x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$). Ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, f est différentiable en tout point. Toutefois, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas, et donc $f'(x)$ n'est pas continue à $x = 0$. \triangle

Remarque 1.5.11. Une fonction dont les dérivées partielles existent et sont continues est dite de classe C^1 . Ainsi, le Théorème 1.5.6 et le Corollaire 1.5.7 affirment que toute fonction de classe C^1 est différentiable. Cependant, l'Exemple 1.5.10 montre qu'il existe des fonctions différentiables qui ne sont pas de la classe C^1 .

Vous avez appris dans les cours préalables que, pour les fonctions à une variable, la différentiabilité implique la continuité. Nous avons le même résultat en dimensions supérieures.

Théorème 1.5.12. Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{a} \in A$. Si f est différentiable en \mathbf{a} , alors f est continu en \mathbf{a} .

Proof. La démonstration est très similaire à celle du cas à une seule variable, nous l'omettons alors. \square

Avertissement 1.5.13. L'existence de toutes les dérivées partielles n'est pas suffisante pour garantir qu'une fonction est différentiable, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 1.5.14. Considérez la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2xy}{(x-y)^2} & x \neq y, \\ 1 & x = y, \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^2}{(x-y)^2} & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Cependant, f n'est pas continue en $(0, 0)$. (Voir [FRYc, Exemple 2.2.9] pour plus de détails.) Ainsi, les dérivées partielles existent en tout point (et sont continues partout sauf en $(0, 0)$), mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$, puisqu'elle n'y est pas continue. \triangle

Exercices.

1.5.1. Complétez la preuve du Lemme 1.4.1.

1.5.2. Calculez la matrice des dérivées partielles des fonctions suivantes :

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, y)$
- (b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (e^x y + \sin x, 2x, x - e^y)$
- (c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x - e^z + y, x^3 y)$
- (d) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (xye^{xz}, y \sin x, 3xyz)$

1.5.3. Supposons que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ soit une application linéaire. Quelle est la différentielle de f ?

1.6 Règles de différentiation

La différentiation dans les dimensions supérieures suit les mêmes règles que celles que vous avez vues pour les fonctions à une variable.

Théorème 1.6.1. Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts et $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Supposons que f et g soient différentiables en $\mathbf{a} \in A$.

- (a) Si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est différentiable en \mathbf{a} et

$$D(cf)(\mathbf{a}) = c(Df(\mathbf{a})).$$

(b) La fonction $f + g$ est différentiable en \mathbf{a} et

$$D(f + g)(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) + Dg(\mathbf{a}).$$

(c) Si $m = 1$, alors fg est différentiable en \mathbf{a} et

$$D(fg)(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a}).$$

Ceci est connu sous le nom de la règle du produit.

(d) Si $m = 1$ et $g(\mathbf{x}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in A$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en \mathbf{a} et

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}.$$

Vous avez d'abord rencontré la règle de la composée pour les fonctions à une variable, où vous avez appris que, pour des fonctions différentiables $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Ce résultat peut être généralisé aux fonctions à plusieurs variables, en utilisant les outils de l'algèbre linéaire.

Théorème 1.6.2 (Règle de la composée). Si

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

sont des fonctions différentiables et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = (Dg(f(\mathbf{a}))) (Df(\mathbf{a})),$$

où le produit du côté droit est une multiplication matricielle (ou, de manière équivalente, une composition d'applications linéaires).

Exemple 1.6.3. Considérons les fonctions

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(u, v) = (u^2 + 5v, 3uv), \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = xy^2.$$

Alors nous avons

$$Df = \begin{bmatrix} 2u & 5 \\ 3v & 3u \end{bmatrix}, \quad Dg = [y^2 \quad 2xy].$$

Ainsi, en utilisant la règle de la composée, nous avons

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= Dg(f(u, v))Df \\ &= Dg(u^2 + 5v, 3uv)Df \\ &= [(3uv)^2 \quad 2(u^2 + 5v)(3uv)] \begin{bmatrix} 2u & 5 \\ 3v & 3u \end{bmatrix} \\ &= [18u^3v^2 + 18(u^2 + 5v)uv^2 \quad 45u^2v^2 + 18(u^2 + 5v)u^2v] \\ &= [36u^3v^2 + 90uv^3 \quad 18u^4v + 135u^2v^2]. \end{aligned}$$

En particulier, nous avons

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial u} = 36u^3v^2 + 90uv^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial v} = 18u^4v + 135u^2v^2.$$

Bien sûr, nous pouvons vérifier cela en calculant

$$g \circ f = (u^2 + 5v)(3uv)^2 = 9u^4v^2 + 45u^2v^3$$

et ensuite calculer les dérivées partielles. △

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §2.4]: Q1, Q5, Q6, Q12–Q14, Q18, Q22.

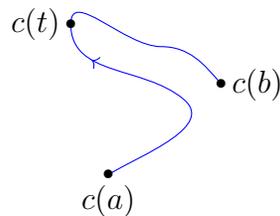
1.7 Chemins, courbes et surfaces

Dans cette section, nous abordons brièvement les notions de chemins, courbes et surfaces. Nous reviendrons plus en détail sur ces concepts importants plus tard dans ce manuel.

Définition 1.7.1 (Chemins et courbes). Un *chemin* est une application

$$c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. (Nous nous intéresserons surtout aux chemins continus.)

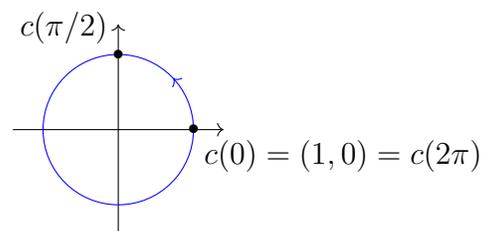


Une *courbe* est l'image d'un chemin :

$$C = \{c(t) : t \in [a, b]\}.$$

Exemple 1.7.2. Considérons le chemin

$$c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$



Son image est le cercle unitaire. △

Exemple 1.7.3 (Équation paramétrique d'une droite). Si $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, alors

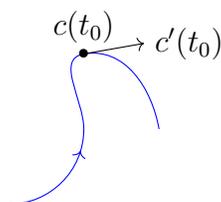
$$\ell(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

est l'équation paramétrique de la droite passant par le point \mathbf{p} et parallèle à \mathbf{v} . Si l'on restreint le domaine à un certain intervalle $[a, b]$, il s'agit alors d'une courbe dont l'image est un segment de droite. \triangle

Étant donné un chemin $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, nous désignerons généralement sa dérivée par $c'(t)$ au lieu de $Dc(t)$. Ainsi, si

$$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)) \quad \text{alors} \quad c'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t)).$$

Pour $t_0 \in [a, b]$, la dérivée $c'(t_0)$ est la *vitesse* au temps t_0 . (Nous utiliserons souvent cette terminologie, même si t ne désigne pas vraiment le temps dans notre situation particulière).

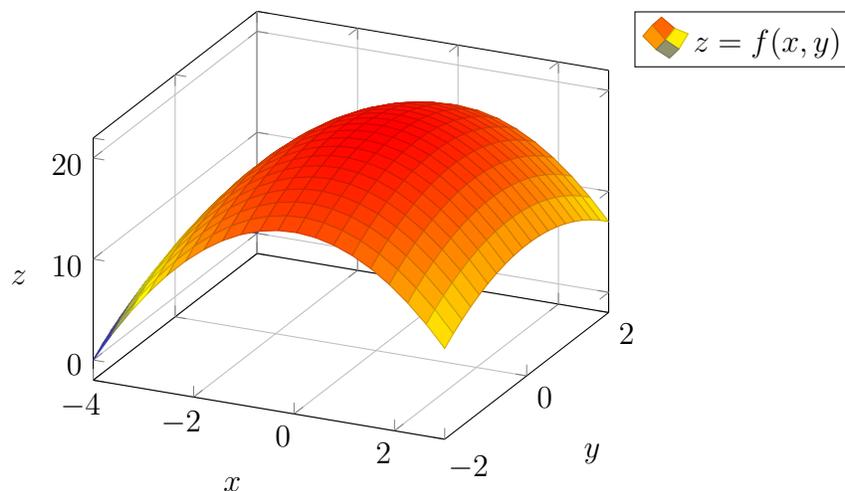


Étant donné que $c'(t_0) \neq \mathbf{0}$, la droite tangente à la courbe est donnée par

$$\ell(t) = c(t_0) + c'(t_0)(t - t_0).$$

Ceci n'est qu'un cas particulier de (1.11).

Exemple 1.7.4. Supposons que nous partions en randonnée. Nous avons une fonction différentiable $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnant l'élévation.



Sur une carte bidimensionnelle (sans tenir compte de l'élévation), notre position au temps t est donnée par un certain chemin différentiable

$$c = (c_1, c_2): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Alors, les coordonnées tridimensionnelles de notre randonnée au moment t sont données par

$$d: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad d(t) = (c_1(t), c_2(t), f(c(t))).$$

Notre élévation au temps t est $f(c(t))$. En utilisant la règle de la composée, nous avons

$$(f \circ c)'(t) = Df(c(t))Dc(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) & \frac{\partial f}{\partial y}(c(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t).$$

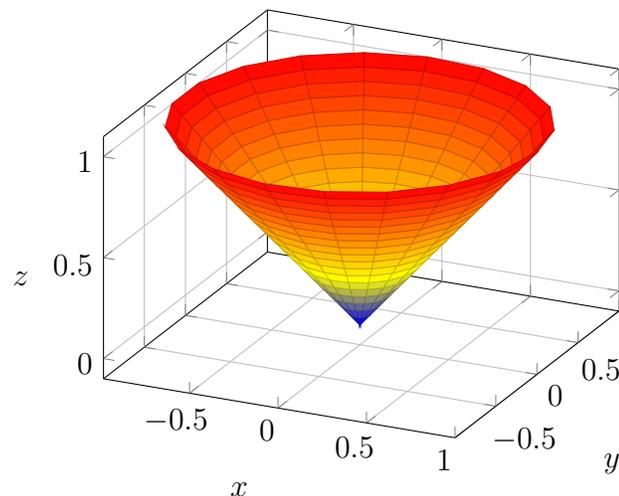
Cela nous donne le taux de variation de l'élévation au temps t . △

Une surface est un objet bidimensionnel dans un espace tridimensionnel. Il existe trois façons de décrire une surface :

- (a) On peut donner une *paramétrisation* de la surface. Par exemple,

$$\Phi: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$$

décrit un cône :



Nous reviendrons sur la paramétrisation de surfaces de manière plus détaillée dans la Section 7.1.

- (b) Nous pouvons décrire la surface comme l'ensemble des solutions à une équation. Par exemple,

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z^2 = x^2 + y^2\}$$

est le même cône que ci-dessus.

- (c) Nous pouvons décrire une surface comme le graphe d'une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Par exemple, le graphe de la fonction

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

est le même cône que ci-dessus.

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble de niveau de f en k est l'ensemble

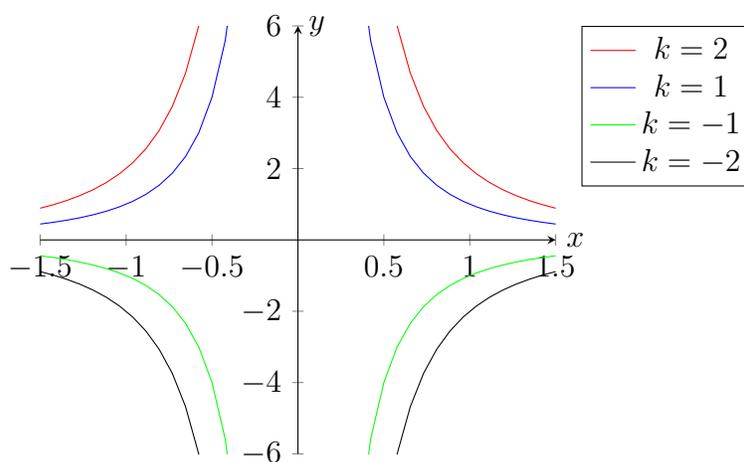
$$\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = k\}. \quad (1.15)$$

Lorsque $n = 2$, les ensembles de niveaux sont appelés *courbes ou lignes de niveau*. Une *grille de contours* est une image montrant plusieurs lignes de niveau pour la même fonction.

Exemple 1.7.5. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 y.$$

L'ensemble des niveaux de f à k est l'ensemble de tous les points (x, y) tels que $k = f(x, y) = x^2 y$, ou, de manière équivalente, $y = \frac{k}{x^2}$.



△

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §1.6]: Q1–Q4, Q6, Q10, Q21.

Exercices tirés de [FRYb, §1.7]: Q2–Q11.

1.8 Dérivées directionnelles

Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYc, §2.7]. Dans la présente section, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.8.1 (Dérivée directionnelle). Soit $\mathbf{a} \in A$, et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. La *dérivée directionnelle* de f à \mathbf{a} le long de \mathbf{v} est

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) := \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}.$$

Remarque 1.8.2. Certaines références exigent que le vecteur \mathbf{v} dans la Définition 1.8.1 soit un vecteur unitaire, c'est-à-dire, $\|\mathbf{v}\| = 1$. Nous ne l'exigerons pas.

Exemple 1.8.3. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xy^2 - 3z,$$

et posons $\mathbf{a} = (q, r, s)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$. On a alors

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) &= f(q + 2t, r + t, s - t) \\ &= (q + 2t)(r + t)^2 - 3(s - t) \\ &= qr^2 + 2tr^2 + 2qtr + 4t^2r + qt^2 + 2t^3 - 3s + 3t. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = 2r^2 + 2qr + 8tr + 2qt + 6t^2 + 3,$$

et donc

$$D_{\mathbf{v}}f(q, r, s) = \left. \frac{d}{dt}f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = 2r^2 + 2qr + 3. \quad \triangle$$

Proposition 1.8.4. *Si f est différentiable en \mathbf{a} , alors*

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Proof. Soit

$$\ell(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) &= \left. \frac{d}{dt}f \circ \ell(t) \right|_{t=0} \\ &= (f \circ \ell)'(0) \\ &= Df(\ell(0))D\ell(0) && \text{(règle de la composée)} \\ &= \nabla^T f(\mathbf{a})\ell'(0) \\ &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}. && \square \end{aligned}$$

Exemple 1.8.5. En revenant à la fonction $f(x, y, z) = xy^2 - 3z$ de l'Exemple 1.8.3, nous avons

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2, 2xy, -3).$$

Ainsi

$$D_{(2,1,-1)}f(x, y, z) = 2y^2 + 2xy + 3.$$

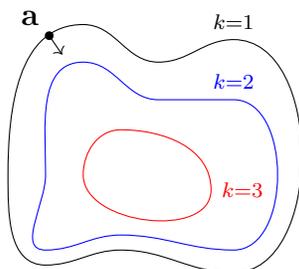
En prenant $(x, y, z) = (q, r, s)$, on obtient la même dérivée directionnelle que celle calculée dans l'Exemple 1.8.3. △

Notez que l'utilisation de la Proposition 1.8.4 présente un avantage significatif en termes de calcul. En effet, nous pouvons calculer le gradient ∇f *une seule fois*, puis trouver *n'importe quelle* dérivée directionnelle en calculant un simple produit scalaire.

Le résultat suivant donne deux interprétations importantes du gradient.

Proposition 1.8.6. *Supposons que f soit différentiable en $\mathbf{a} \in A$, et que $k = f(\mathbf{a})$.*

- (a) *Le gradient $\nabla f(\mathbf{a})$ est un vecteur pointant dans la direction dans laquelle f croît le plus rapidement.*
- (b) *Si S est l'ensemble de niveau de f à k (donc $\mathbf{a} \in S$), alors $\nabla f(\mathbf{a})$ est orthogonal à la droite/au plan/à l'hyperplan tangent à S en \mathbf{a} .*



Proof. (a) Pour tout vecteur unitaire \mathbf{v} , $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ nous indique à quelle vitesse f change le long de la direction \mathbf{v} . Nous avons

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre $\nabla f(\mathbf{a})$ et \mathbf{v} . Or, $\cos \theta$ atteint sa valeur maximale lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque $\nabla f(\mathbf{a})$ et \mathbf{v} sont parallèles.

(b) Soit $c(t)$ un chemin dans S tel que $c(t_0) = \mathbf{a}$. Alors $c'(t_0)$ est une droite tangente contenue dans le plan tangent à S en \mathbf{a} . Nous voulons donc montrer que $\nabla f(\mathbf{a}) \perp c'(t_0)$ pour tout tel chemin.

Pour tout t on a

$$c(t) \in S \implies f(c(t)) = k \implies (f \circ c)'(t) = 0.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= (f \circ c)'(t) \\ &= D(f \circ c)(t) \\ &= \nabla f(c(t)) \cdot c'(t). \end{aligned} \quad \text{(règle de la composée)}$$

Ainsi, en prenant $t = t_0$, on a $0 = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot c'(t_0)$, et donc $\nabla f(\mathbf{a}) \perp c'(t_0)$. □

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §2.7]: Q1–Q8, Q10–Q20.

1.9 Dérivées d'ordre supérieur

Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYc, §2.3].

Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ soit ouvert et que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent, alors elles sont à nouveau des fonctions de $A \rightarrow \mathbb{R}$, et nous pouvons essayer de dériver de nouveau. Si les dérivées partielles sont différentiables, nous obtenons les *dérivées du second ordre*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Bien sûr, si les dérivées partielles de ces dérivées de second ordre existent, nous pouvons dériver de nouveau, pour obtenir les *dérivées de troisième ordre*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Nous pouvons continuer autant que nous obtenons des fonctions dont les dérivées partielles existent.

Nous pouvons également utiliser la notation abrégée de (1.6), notamment lorsque nos variables sont notées x, y, z . Dans ce cas, par exemple, nous avons

$$f_{xx} := (f_x)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \quad f_{xy} := (f_x)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} := (f_y)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} := (f_y)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}.$$

Faites bien attention à l'ordre des variables dans l'indice !

Exemple 1.9.1. Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et que $f(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$. Alors

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x + \beta y}, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \beta e^{\alpha x + \beta y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta y}, & f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \alpha \beta e^{\alpha x + \beta y}, \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \alpha \beta e^{\alpha x + \beta y}, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \beta^2 e^{\alpha x + \beta y}. \end{aligned}$$

En général, pour $m, n \geq 0$, on a

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \alpha^m \beta^n e^{\alpha x + \beta y}. \quad (1.16)$$

Essayez de prouver ceci par récurrence (Exercice 1.9.1). △

Exemple 1.9.2. Supposons que

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 x_2 \cos(x_3 x_4).$$

Alors

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_4} = \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2} (-x_1^3 x_2 x_3 \sin(x_3 x_4))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} (-x_1^3 x_3 \sin(x_3 x_4)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_3} (-3x_1^2 x_3 \sin(x_3 x_4)) \\
&= -3x_1^2 \sin(x_3 x_4) - 3x_1^2 x_3 x_4 \cos(x_3 x_4).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_4 \partial x_2} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_4} (x_1^3 \cos(x_3 x_4)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} (-x_1^3 x_3 \sin(x_3 x_4)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1} (-x_1^3 \sin(x_3 x_4) - x_1^3 x_3 x_4 \cos(x_3 x_4)) \\
&= -3x_1^2 \sin(x_3 x_4) - 3x_1^2 x_3 x_4 \cos(x_3 x_4). \quad \triangle
\end{aligned}$$

Définition 1.9.3 (Classe C^k et classe C^∞). Soit $k \in \mathbb{N}$. Une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, est dite de classe C^k en \mathbf{a} si toutes les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues en \mathbf{a} . Plus généralement, $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^k en \mathbf{a} si chaque fonction composante f_i , $1 \leq i \leq m$, est de classe C^k en \mathbf{a} . Une fonction est de classe C^∞ en \mathbf{a} si elle est de classe C^k en \mathbf{a} pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction est de la classe C^k (respectivement, de la classe C^∞) si elle est de la classe C^k (respectivement, de la classe C^∞) en tout $\mathbf{a} \in A$.

Exemple 1.9.4. (a) Une fonction est de classe C^0 si elle est continue.

(b) Une fonction est C^1 si toutes les dérivées partielles existent et sont continues. En vertu du Théorème 1.5.6, toutes les fonctions de classe C^1 sont différentiables.

Nous pouvons considérer la condition d'être une fonction de classe C^k comme une condition de continuité ou de différentiabilité d'ordre « supérieur ». \triangle

Exemple 1.9.5. Les fonctions $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\frac{1}{x}$ et $\log x$ sont toutes de classe C^∞ . (Notez que nous supposons implicitement que le domaine de chaque fonction est le sous-ensemble de \mathbb{R} où elle est définie). De même, tous les polynômes sont de classe C^∞ . \triangle

Nous avons vu dans l'Exemple 1.9.1 que $f_{xy} = f_{yx}$, et nous avons vu dans l'Exemple 1.9.2 que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_4} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_4 \partial x_2}.$$

Dans les deux exemples, l'ordre dans lequel nous calculons les dérivées partielles n'a pas d'importance. Le théorème suivant illustre ce résultat.

Théorème 1.9.6 (Théorème de Clairaut ou théorème de Schwarz). *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ soit ouvert et que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et sont continues en \mathbf{a} , alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

En particulier, si f est de classe C^2 , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq n.$$

Proof. Une preuve de ce théorème peut être trouvée dans [FRYc, §2.3.1]. □

Remarque 1.9.7. En utilisant le Théorème 1.9.6 et une récurrence, nous obtenons des résultats analogues pour les dérivées d'ordre supérieur. Par exemple, si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^4 , alors

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2}.$$

Avertissement 1.9.8. Il existe des fonctions dont les dérivées partielles mixtes existent, mais ne sont pas égales !

Exemple 1.9.9. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On peut alors montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

Voir [FRYc, §2.3.2] pour les détails de ce calcul. △

L'ensemble des fonctions C^k est fermée sous les opérations suivantes :

- *Addition.* Si $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ sont de la classe C^k , alors $f + g$ l'est aussi.
- *Multiplication par scalaire.* Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αf l'est aussi.
- *Produit.* Si $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^k , alors fg l'est aussi.
- *Composition.* Si $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$,

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

et f, g sont toutes deux de classe C^k , alors $g \circ f$ l'est aussi.

Exercices.

1.9.1. Montrez (1.16) par récurrence.

Exercices tirés de [FRYb, §2.3]: Q1–Q7.

1.10 Théorème de Taylor

Rappelons la version en une variable du théorème de Taylor. Il affirme que, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k en a , alors

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underbrace{\frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k}_{k\text{-ième polynôme de Taylor}} + R_k(h),$$

où

$$\frac{R_k(h)}{h^k} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Pour un rappel sur ce sujet, voir [FRYa, §3.4].

Lorsque $k = 1$, le théorème de Taylor correspond aux approximations affines en une variable que nous avons abordées dans la Section 1.4. Lorsque $k = 2$, il donne la meilleure approximation *quadratique* possible de la fonction.

Nous aimerions généraliser le théorème de Taylor à un plus grand nombre de variables. Pour le reste de cette section, supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert et que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.10.1 (Polynôme de Taylor). Si les dérivées partielles d'ordre k de f existent en \mathbf{a} , alors le *k -ième polynôme de Taylor*, ou le *polynôme de Taylor de degré k* de f en \mathbf{a} est

$$p_k(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \sum_{j_1, \dots, j_i=1}^n \frac{\partial^i f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_i}}(\mathbf{a}) h_{j_1} \cdots h_{j_i}, \quad (1.17)$$

où $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$. Nous définissons la fonction *remainder*

$$R_{\mathbf{a},k}(\mathbf{h}) := f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p_k(\mathbf{a} + \mathbf{h}),$$

de sorte que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = p_k(\mathbf{a} + \mathbf{h}) + R_{\mathbf{a},k}(\mathbf{h}).$$

Théorème 1.10.2 (Théorème de Taylor). Si f est de classe C^k en \mathbf{a} , alors

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R_{\mathbf{a},k}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k} = 0.$$

Proof. Nous ne prouverons pas ce théorème dans ce manuel. Une preuve du cas $k = 2$ peut être trouvée dans [MT11, §3.2, Th. 3]. \square

Décrivons maintenant plus explicitement le cas $k = 2$ du théorème de Taylor.

Définition 1.10.3 (Matrice hessienne). Si les dérivées partielles secondes de f existent, alors la *matrice hessienne* de f en \mathbf{a} est

$$\mathbf{H}f(\mathbf{a}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}). \quad (1.18)$$

En comparant (1.17) et (1.18), nous voyons que le polynôme de Taylor de degré 2 est donné par

$$p_2(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^\top (\mathbf{H}f(\mathbf{a})) \mathbf{h}, \quad (1.19)$$

où $\mathbf{h}^\top = [h_1 \ \cdots \ h_n]$ est la transposée de \mathbf{h} .

Corollaire 1.10.4 (Formule de Taylor du deuxième ordre). *Si f est de classe C^2 à \mathbf{a} , alors*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^\top (\mathbf{H}f) \mathbf{h} + R_{\mathbf{a},2}(\mathbf{h}),$$

où

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R_{\mathbf{a},2}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0.$$

Exemple 1.10.5. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^y \cos(x^2 - 2y).$$

Trouvons le polynôme de Taylor de degré 2 en $\mathbf{a} = (\sqrt{\pi}, \pi)$. On a

$$f(\sqrt{\pi}, \pi) = e^\pi \cos(-\pi) = -e^\pi.$$

Ensuite, nous calculons les dérivées partielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2e^y x \sin(x^2 - 2y), & \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{\pi}, \pi) &= -2e^\pi \sqrt{\pi} \sin(-\pi) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^y \cos(x^2 - 2y) + 2e^y \sin(x^2 - 2y), & \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{\pi}, \pi) &= e^\pi \cos(-\pi) + 2e^\pi \sin(-\pi) = -e^\pi. \end{aligned}$$

Enfin, nous calculons les dérivées partielles du second ordre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2e^y (\sin(x^2 - 2y) + 2x^2 \cos(x^2 - 2y)), & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{\pi}, \pi) &= 4\pi e^\pi, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -2x (e^y \sin(x^2 - 2y) - 2e^y \cos(x^2 - 2y)), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{\pi}, \pi) &= -4\sqrt{\pi} e^\pi, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -3e^y \cos(x^2 - 2y) + 4e^y \sin(x^2 - 2y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{\pi}, \pi) &= 3e^\pi, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2x (e^y \sin(x^2 - 2y) - 2e^y \cos(x^2 - 2y)), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{\pi}, \pi) &= -4\sqrt{\pi} e^\pi. \end{aligned}$$

Ainsi, le gradient et la matrice hessienne sont les suivants

$$\nabla f(\sqrt{\pi}, \pi) = (0, -e^\pi), \quad \mathbf{H}f(\sqrt{\pi}, \pi) = \begin{bmatrix} 4\pi e^\pi & -4\sqrt{\pi} e^\pi \\ -4\sqrt{\pi} e^\pi & 3e^\pi \end{bmatrix},$$

et le polynôme de Taylor de degré 2 est alors

$$p_2((\sqrt{\pi}, \pi) + (h_1, h_2))$$

$$\begin{aligned}
&= -e^\pi + (0, -e^\pi) \cdot (h_1, h_2) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\pi e^\pi & -4\sqrt{\pi}e^\pi \\ -4\sqrt{\pi}e^\pi & 3e^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&= -e^\pi - e^\pi h_2 + 2\pi e^\pi h_1^2 + \frac{3}{2} e^\pi h_2^2 - 4\sqrt{\pi} e^\pi h_1 h_2.
\end{aligned}$$

Puisque f est de classe C^2 , le Corollaire 1.10.4 nous montre que la différence entre la fonction et ce polynôme tend vers zéro plus vite que $\|\mathbf{h}\|^2$ car $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. \triangle

Exercices.

1.10.1 ([MT11, §3.2, Exercice 1]). Soit $f(x, y) = e^{x+y}$.

- (a) Trouvez le polynôme de Taylor du premier degré pour f en $(0, 0)$.
- (b) Trouvez le polynôme de Taylor du second ordre pour f en $(0, 0)$.

1.10.2 ([MT11, §3.2, Exercice 2]). Supposons que

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y) = ax + by,$$

est une fonction linéaire.

- (a) Trouvez l'approximation de Taylor du premier ordre pour L .
Donc $p_1 = L$.
- (b) Trouvez l'approximation de Taylor du second ordre pour L .
- (c) À quoi ressemblent les approximations d'ordre supérieur ?

1.10.3 ([MT11, §3.2, Exercices 3–7]). Pour chacun des cas suivants, déterminez le polynôme de Taylor du second degré pour la fonction donnée autour du point $(0, 0)$. Utilisez ce polynôme pour obtenir une approximation de $f(-1, -1)$. Comparez votre approximation à la valeur exacte à l'aide d'une calculatrice.

- (a) $f(x, y) = (x + y)^2$.
- (b) $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$
- (c) $f(x, y) = e^{x+y}$.
- (d) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos(xy)$

1.10.4 ([MT11, §3.2, Exercice 11]). Soit $g(x, y) = \sin(xy) - 3x^2 \ln y + 1$. Trouvez le polynôme de degré 2 qui approche le mieux g près du point $(\pi/2, 1)$.

1.11 Le théorème des fonctions implicites

Dans cette section, nous énonçons le *théorème des fonctions implicites*, qui est l'un des théorèmes les plus importants en analyse. Une preuve détaillée dépasse le cadre de ce cours, mais nous donnerons une illustration de la raison pour laquelle il est vrai. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [MT11, §3.5].

Rappelons que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble de niveau de f en k est

$$\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = k\}$$

Si nous définissons $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - k$, alors

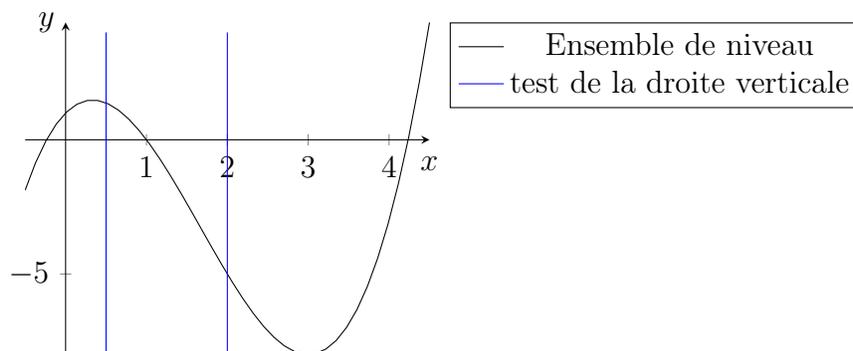
$$\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = k\} = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Ainsi, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $k = 0$.

Considérons maintenant un tel ensemble de niveaux, donné par l'équation

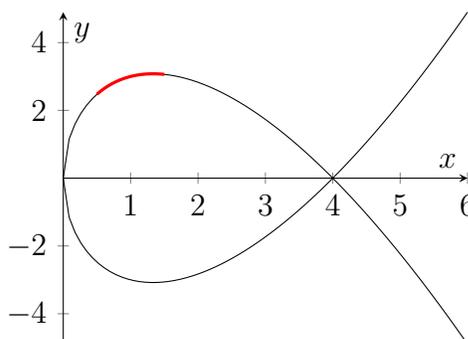
$$f(x, y) = 0.$$

Quand pouvons-nous résoudre pour une variable en fonction d'une autre ? Si l'ensemble de niveaux satisfait au test de la droite verticale (chaque droite verticale rencontre le graphique au plus une fois), nous pouvons alors écrire y comme une fonction de x .



Considérons ensuite l'ensemble de niveaux donné par l'équation

$$f(x, y) = x^3 - 8x^2 + 16x - y^2 = 0.$$



Cet ensemble de niveaux ne satisfait pas au test de la droite verticale. Cependant, près de certains points, nous pouvons écrire y comme une fonction de x . Par exemple, considérez

la partie de l'ensemble de niveaux près du point $(1, 3)$, indiqué en rouge ci-dessus. Dans cette petite région, nous *pouvons* écrire y comme une fonction de x . En revanche, nous ne pourrions pas le faire près du point $(0, 0)$. Le problème est que la droite tangente est verticale en ce point.

Définition 1.11.1 (Voisinage). Un *voisinage* d'un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{a} \in U$.

Pour énoncer le théorème des fonctions implicites, on utilise le fait que $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pour décrire les points de \mathbb{R}^{n+1} sous la forme (\mathbf{x}, z) , où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, et $z \in \mathbb{R}$. En particulier, si $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\frac{\partial F}{\partial z}$ désigne la dérivée partielle par rapport à la dernière variable.

Théorème 1.11.2 (Cas particulier du théorème des fonctions implicites). *Supposons que $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $(\mathbf{x}_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tel que*

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0.$$

Alors il existe des voisinages $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de \mathbf{x}_0 et $V \subseteq \mathbb{R}$ de z_0 tels qu'il y a une fonction unique

$$g: U \rightarrow V \quad \text{de sorte que} \quad F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in U.$$

De plus, g est de classe C^1 et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))} \tag{1.20}$$

pour tout $\mathbf{x} \in U$ et $i \in \{1, \dots, n\}$.

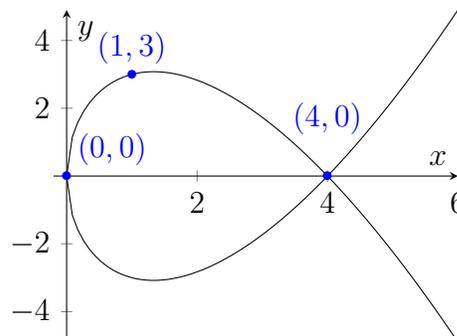
Proof. Ce théorème est un cas particulier de la fonction implicite générale que nous énoncerons ci-dessous (Théorème 1.11.5). Une fois que l'on sait que $z = g(\mathbf{x})$ existe et est différentiable, on peut obtenir l'équation (1.20) par différentiation implicite, en appliquant la règle de la composée à $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$. On obtient ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \right) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0,$$

ce qui est équivalent à (1.20). □

Exemple 1.11.3. Considérons les points $(1, 3)$, $(0, 0)$, et $(4, 0)$ de l'ensemble de niveau

$$F(x, y) = x^3 - 8x^2 + 16x - y^2 = 0.$$



On a donc

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y.$$

Cette valeur est nulle si et seulement si $y = 0$. Par conséquent, le cas particulier du théorème des fonctions implicites (Théorème 1.11.2) implique que nous pouvons écrire y en tant que fonction de x près de chaque point de l'ensemble des niveaux où $y \neq 0$. En particulier, nous pouvons le faire près du point $(1, 3)$. (Notez que le z dans le Théorème 1.11.2 est notre y ici).

Nous pourrions également interchanger les rôles des variables, et essayer d'exprimer x comme une fonction de y . Alors le z dans le Théorème 1.11.2 est notre x . Puisque

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 16x + 16 = (x - 4)(3x - 4),$$

nous pouvons écrire x comme une fonction de y près de chaque point de l'ensemble de niveau où $x \neq \frac{4}{3}, 4$. En particulier, nous pouvons le faire près de $(0, 0)$, un point où nous pourrions *pas* écrire y comme une fonction de x .

Le point le plus problématique est $(4, 0)$, car les deux dérivées partielles de F s'annulent à la fois en ce point :

$$\nabla F(4, 0) = \mathbf{0}.$$

Ici, nous ne pouvons écrire aucune variable en fonction des autres. En regardant l'image de l'ensemble de niveaux ci-dessus, nous voyons pourquoi c'est le cas. L'ensemble de niveau ne satisfait pas le test de la droite verticale ni celui de la droite horizontale dans *n'importe quel* voisinage du point $(4, 0)$. △

Remarque 1.11.4. Comme illustré dans l'Exemple 1.11.3, si $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$F(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla F(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0},$$

alors on peut exprimer au moins une variable en fonction des autres.

Nous donnons maintenant une version plus générale du théorème des fonctions implicites. Supposons que nous ayons une fonction de classe C^1

$$F = (F_1, \dots, F_m): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

On écrit les points de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ comme (\mathbf{x}, \mathbf{z}) , avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$. On définit

$$D_{\mathbf{x}}F := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \text{et}$$

$$D_{\mathbf{z}}F := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R}).$$

(Ceci entre en conflit avec notre notation pour la dérivée directionnelle, mais le contexte devrait rendre clair ce que nous voulons dire). Nous considérerons l'équation $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ comme un ensemble de m équations :

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0, \dots, F_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0.$$

Nous aimerions résoudre z_1, \dots, z_m en fonction de x_1, \dots, x_n .

Théorème 1.11.5 (Cas général du Théorème des fonctions implicites). *Supposons que $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ soit une fonction C^1 et $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, telle que*

$$F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \text{ est inversible.}$$

Alors il existe des voisinages $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de \mathbf{x}_0 et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ de \mathbf{z}_0 tels qu'il existe une fonction unique

$$g: U \rightarrow V \quad \text{de sorte que} \quad F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in U.$$

De plus, g est de classe C^1 et

$$Dg(\mathbf{x}) = -(D_{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})))^{-1} D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})).$$

Idée de la preuve. Pour une preuve complète de ce théorème, voir [Gou59, p. 45]. Nous ne donnons ici qu'une illustration de la preuve afin de donner une idée de la raison pour laquelle ce théorème est valable. Le polynôme de Taylor du premier degré de F en (\mathbf{x}, \mathbf{z}) (voir (1.17)) donne l'approximation suivante

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &\approx F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) + \nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot ((\mathbf{x}, \mathbf{z}) - (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)) \\ &= F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) + D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + D_{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0). \end{aligned}$$

Si $D_{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ est inversible, alors nous pouvons (approximativement) résoudre l'équation $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ pour obtenir

$$\mathbf{z} \approx \mathbf{z}_0 - (D_{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0))^{-1} (F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) + D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)).$$

Même s'il ne s'agit que d'une approximation, il est toujours vrai que si $D_{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ est inversible, alors nous pouvons trouver \mathbf{z} en termes de \mathbf{x} à des points proches. \square

Remarque 1.11.6. Rappelez-vous qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Nous pouvons donc voir si $D_{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ est inversible ou non en calculant son déterminant.

Exemple 1.11.7. Considérons l'ensemble des points (x, y, z) satisfaisant les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} x \sin y + e^{x+z} &= 1, \\ x^2 y + e^{yz} - z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Notez que les points

$$(1, 0, -1) \quad \text{et} \quad (-1, 0, 1)$$

sont tous deux des solutions. Peut-on trouver y et z en fonction de x autour de ces points ?

Nous utiliserons le théorème des fonctions implicites (Théorème 1.11.5) avec $n = 1$, $m = 2$ et $F = (F_1, F_2): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, et où

$$F_1(x, y, z) = x \sin y + e^{x+z} - 1, \quad F_2(x, y, z) = x^2 y + e^{yz} - z^2 - 1.$$

On a

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin y + e^{x+z} & x \cos y & e^{x+z} \\ 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} - 2z \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$D_{(y,z)}F = \begin{bmatrix} x \cos y & e^{x+z} \\ x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} - 2z \end{bmatrix}, \quad D_{(y,z)}F(1, 0, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Puisque

$$\det D_{(y,z)}F(1, 0, -1) = 1(-2) - 1(0) = -2 \neq 0,$$

la matrice $D_{(y,z)}F(1, 0, -1)$ est inversible. Ainsi, le théorème des fonctions implicites s'applique, et nous pouvons résoudre (y, z) en termes de x près du point $(1, 0, -1)$.

Cependant,

$$D_{(y,z)}F(-1, 0, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

qui n'est pas inversible. Ainsi, le théorème de la fonction implicite ne s'applique pas. D'autre part,

$$D_{(x,z)}F = \begin{bmatrix} \sin y + e^{x+z} & e^{x+z} \\ 2xy & ye^{yz} - 2z \end{bmatrix}, \quad \text{et donc} \quad D_{(x,z)}F(-1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

est inversible. Le théorème de la fonction implicite nous dit donc que nous pouvons résoudre (x, z) en termes de y près du point $(-1, 0, 1)$. \triangle

Avertissement 1.11.8. Les réciproques du Théorème 1.11.2 et du Théorème 1.11.5 sont fausses ! Par exemple, si $\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$ dans le contexte du Théorème 1.11.2, cela n'implique pas qu'il est impossible d'exprimer z comme une fonction de \mathbf{x} près de (\mathbf{x}_0, z_0) . Voir l'Exercice 1.11.1.

Exercices.

1.11.1. Utilisez la fonction $F(x, z) = x^3 - z^3$ pour montrer que la réciproque du Théorème 1.11.2 est fausse.

1.11.2 ([MT11, §3.5, Exercice 1]). Montrer que l'équation $x + y - z + \cos(xyz) = 1$ est résoluble pour $z = g(x, y)$ près de l'origine. Trouver $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ à $(0, 0)$.

1.11.3 ([MT11, §3.5, Exercice 2]). Montrer que $xy + z + 3xz^5 = 4$ est résoluble pour z en tant que fonction de (x, y) au voisinage de $(1, 0, 1)$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(x, y) = (1, 0)$.

1.11.4 ([MT11, §3.5, Exercice 6]). Considérons la surface S donnée par $3y^2z^2 - 3x = 0$.

- En utilisant le théorème des fonctions implicites, vérifiez que nous pouvons exprimer x en fonction de y et z près de n'importe quel point de S . Écrivez explicitement x en tant que fonction de y et z .
- Montrez que près de $(1, 1, -1)$, nous pouvons exprimer soit y soit z , et donnez des expressions explicites pour ces variables en fonction des deux autres.

1.11.5 ([MT11, §3.5, Exercice 7]). Montrer que $x^3z^2 - z^3yx = 0$ est résoluble pour z en fonction de (x, y) au voisinage de $(1, 1, 1)$, mais pas au voisinage de l'origine. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $(x, y) = (1, 1)$.

1.11.6 ([MT11, §3.5, Exercice 8]). Discutez de la compatibilité du système

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

pour u, v, w en fonction de x, y, z au voisinage de $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ et $w = -2$.

1.11.7 ([MT11, §3.5, Exercice 14]). Considérons la sphère unitaire

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Cette sphère coupe l'axe des x en deux points. Quelles variables peut-on résoudre en ces points ? Qu'en est-il des points d'intersection de S avec les axes des y et des z respectivement ?

1.12 Théorème de la fonction inverse

Un cas particulier du théorème des fonctions implicites (Théorème 1.11.5) est le *théorème de la fonction inverse*. Supposons que nous ayons une fonction

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Quand pouvons-nous inverser cette fonction, au moins localement (c'est-à-dire au voisinage d'un point) ? Le théorème de la fonction inverse dit que nous pouvons le faire lorsque la différentielle est inversible en ce point.

Théorème 1.12.1 (Théorème de la fonction inverse). *Supposons que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction C^1 , que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, et que $Df(\mathbf{x}_0)$ est une matrice inversible. Alors il existe un voisinage U de \mathbf{x}_0 et un voisinage V de $f(\mathbf{x}_0)$ tels que $f|_U: U \rightarrow V$ est une bijection (donc inversible). De plus, $(f|_U)^{-1}: V \rightarrow U$ est C^1 .*

Proof. Considérons la fonction

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \iff F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Soit $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ de sorte que $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$.

Puisque

$$D_{\mathbf{x}}F = Df,$$

notre hypothèse dans laquelle $Df(\mathbf{x}_0)$ est inversible implique que $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)$ est inversible. Par conséquent, le théorème des fonctions implicites (Théorème 1.11.5) implique qu'il existe des voisinages V de \mathbf{y}_0 et U de \mathbf{x}_0 tels qu'il existe une fonction unique

$$g: V \rightarrow U \quad \text{telle que} \quad F(g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \text{pour tout } \mathbf{y} \in V.$$

En d'autres termes, g est la seule fonction qui satisfait

$$\mathbf{y} = f(g(\mathbf{y})) \quad \text{pour tout } \mathbf{y} \in V. \quad (1.21)$$

Donc $g = (f|_U)^{-1}$. (Plus précisément, (1.21) montre que g est l'inverse droit de $f|_U$, ce qui implique que $f|_U$ est surjectif. L'unicité de g montre que f est aussi injectif, donc g est l'inverse des deux côtés de $f|_U$). \square

Exemple 1.12.2 (Coordonnées sphériques). Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi).$$

On a alors

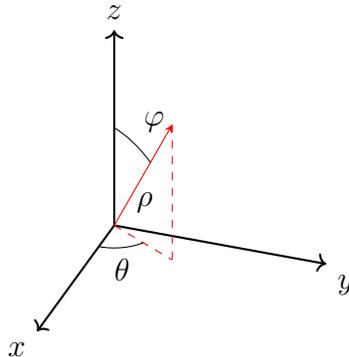
$$Df = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

À l'aide de quelques formules trigonométriques de base (Exercice 1.12.4), nous pouvons montrer que

$$\det(Df) = -\rho^2 \sin \varphi. \quad (1.22)$$

Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème de la fonction inverse (Théorème 1.12.1) tant que $\rho \neq 0$ et $\sin \varphi \neq 0$ (c'est-à-dire que φ n'est pas un multiple de π).

La fonction f envoie (ρ, θ, φ) au point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sphériques sont (ρ, θ, φ) :



Lorsque $\rho = 0$, nous sommes à l'origine. Alors les variations de θ et φ n'affectent pas le point (x, y, z) . Ainsi, la fonction n'est pas localement inversible lorsque $\rho = 0$. De même, lorsque φ est un multiple de π , on est sur l'axe z , et les variations de θ ne changent pas le point. Nous aborderons les coordonnées sphériques plus en détail dans la Section 4.5. \triangle

Avertissement 1.12.3. La réciproque du Théorème 1.12.1 est fautive ! Voir l'Exercice 1.12.1.

Exercices.

1.12.1. Montrez que la réciproque du Théorème 1.12.1 est fautive en donnant un contre-exemple. *Indication* : Utilisez $n = 1$ et $f(x) = x^3$.

1.12.2 ([MT11, §3.5, Exercice 11]). Considérons

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right).$$

Cette application a-t-elle un inverse local au voisinage de $(x, y) = (0, 1)$?

1.12.3 ([MT11, §3.5, Exercice 12]). (a) On définit

$$F(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Montrez que le déterminant de la matrice jacobienne en (r_0, θ_0) est

$$\det DF(r_0, \theta_0) = r_0.$$

(b) Quand existe-t-il une fonction inverse lisse $(r(x, y), \theta(x, y))$? Vérifiez-le directement et à l'aide du théorème de la fonction inverse.

1.12.4. Démontrez (1.22).

Chapitre 2

Extréma

L'une des applications importantes du calcul différentiel en une variable est de trouver les extréma (maxima et minima) des fonctions d'une variable. Nous souhaitons à présent généraliser ces techniques aux fonctions de plusieurs variables. Une bonne référence pour le matériel de ce chapitre est [FRYc, §2.9, §2.10].

2.1 Valeurs maximales et minimales

On commence par quelques définitions. On rappelle que la définition de la boule ouverte $B_r(\mathbf{a})$ donnée dans la Définition 1.1.1.

Définition 2.1.1 (Maximum et minimum). Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, et $\mathbf{a} \in A$.

- On dit que \mathbf{a} est un *maximum local* de f s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}).$$

- On dit que \mathbf{a} est un *minimum local* de f s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}).$$

- On dit que \mathbf{a} est un *maximum global* ou *absolu* de f si

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in A.$$

- On dit que \mathbf{a} est un *minimum global* ou *absolu* de f si

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in A.$$

On dit que \mathbf{a} est un *extremum local* s'il est un minimum local ou un maximum local. On dit que \mathbf{a} est un *extremum global* s'il est un minimum global ou un maximum global. Les pluriels de maximum, minimum et extremum sont respectivement *maxima*, *minima* et *extrema*.

Définition 2.1.2 (Point critique). Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $\mathbf{a} \in A$ est un *point critique* de f si ou bien $\nabla f = \mathbf{0}$ ou bien f n'est pas différentiable en \mathbf{a} .

Remarque 2.1.3. Si $\mathbf{a} \in \partial A$ (c'est-à-dire que \mathbf{a} est un point de la frontière de A), alors f n'est pas différentiable en \mathbf{a} . Par conséquent, tous les points de la frontière sont des points critiques.

Remarque 2.1.4. Certains ouvrages (par exemple [FRYc]) utilisent le terme *point critique* uniquement pour désigner les points \mathbf{a} tels que $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, et appellent $\mathbf{a} \in A$ un *point singulier* si f n'est pas différentiable en \mathbf{a} .

En calcul différentiel en une variable, on a vu que toute fonction continue définie sur un intervalle fermé atteint un maximum et un minimum globaux. Ce résultat peut être généralisé à plusieurs variables.

Définition 2.1.5 (Borné, compact). On dit que l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est *borné* s'il existe un certain $r > 0$ tel que $A \subseteq B_r(\mathbf{0})$. Si A est borné et contient sa frontière (c'est-à-dire que $\partial A \subseteq A$), on dit que A est *compact*.

Exemples 2.1.6. (a) Pour $r > 0$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, la boule ouverte $B_r(\mathbf{a})$ n'est pas compacte car elle ne contient pas sa frontière mais est bornée.

(b) Pour $r > 0$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, la boule fermée $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$ est bornée et compacte.

(c) La sphère $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est compacte car elle est bornée et n'a pas de frontière (donc elle contient sa frontière, puisque l'ensemble vide est contenu dans tout ensemble).

(d) L'ensemble $[0, 1]^2$ est compact.

(e) L'ensemble $A = [0, 1] \times (0, 1]$ n'est pas compact, car il ne contient pas sa frontière. Par exemple, $(0.5, 0)$ est un point de la frontière de A qui n'est pas contenu dans A .

(f) L'ensemble $A = \mathbb{R} \times [0, 1]$ n'est pas compact, car il n'est pas borné.

△

Théorème 2.1.7 (Théorème des valeurs extrêmes). *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ soit compact, et que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ soit continu. Alors f atteint un maximum et un minimum globaux en A . En d'autres termes, ils existent $\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max} \in A$ tels que*

$$f(\mathbf{x}_{\min}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_{\max}) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in A.$$

Proof. La preuve de ce théorème fait intervenir des notions d'analyse réelle, et dépasse le cadre de ce cours. Pour une idée de la preuve, voir http://www.cut-the-knot.org/fta/fta_note.shtml. □

Exemple 2.1.8. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. L'intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^2$ est borné et contient sa limite, donc est compact. Alors le Théorème 2.1.7 se réduit au théorème des valeurs extrêmes que vous avez vu en calcul différentiel en une variable : toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un maximum et un minimum globaux. △

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est *bornée* s'il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$-M \leq f(x, y) \leq M \quad \text{pour tout } (x, y) \in A.$$

Notez que ceci est équivalent à dire que l'image $f(A)$ de f est un ensemble borné au sens de la Définition 2.1.5.

Lemme 2.1.9. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée.*

Proof. Selon le Théorème 2.1.7, f atteint un maximum global M_1 et un minimum global m_1 . Si on définit $M = \max\{|M_1|, |m_1|\}$, alors pour tout $(x, y) \in A$, on a

$$-M \leq m_1 \leq f(x, y) \leq M_1 \leq M.$$

Donc f est bornée. □

Théorème 2.1.10 (Test de la dérivée première). *Tout extremum local est un point critique.*

Proof. Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons aussi que $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$ est un extremum local. Si f n'est pas différentiable en \mathbf{a} , alors \mathbf{a} est un point critique, et on a terminé. Donc, supposons que f est différentiable en \mathbf{a} . Pour $1 \leq i \leq n$, on considère la fonction

$$g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Puisque \mathbf{a} est un extremum local pour f , il est aussi un extremum local pour g_i . D'après le test de la dérivée première en une variable, on a

$$0 = \frac{dg_i}{dx}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

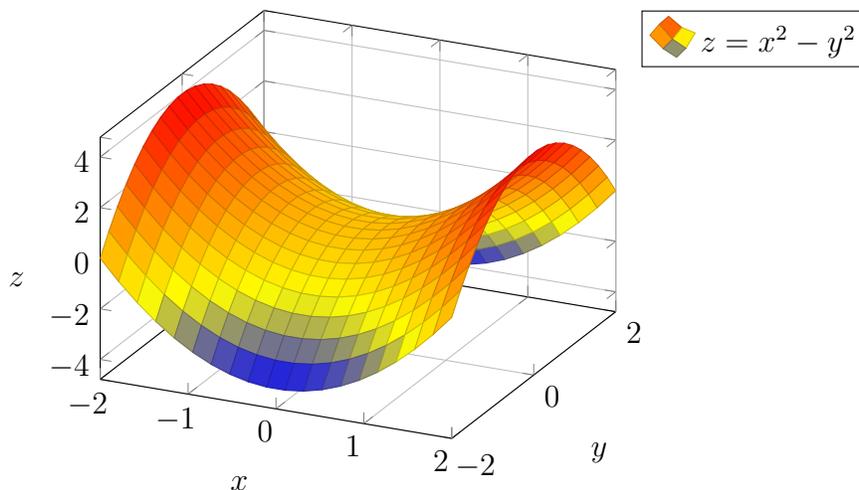
Donc $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. □

Avertissement 2.1.11. La réciproque du Théorème 2.1.10 est fautive, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 2.1.12. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Son graphe est comme suit :



On a donc $\nabla f = (2x, -2y)$. Par conséquent, $\nabla f(0, 0) = \mathbf{0}$, et donc $(0, 0)$ est un point critique. Cependant, $(0, 0)$ n'est pas un extremum local. Nous avons $f(0, 0) = 0$. Cependant, pour tout $r > 0$, la boule $B_r(0, 0)$ contient les points $(\frac{r}{2}, 0)$ et $(0, \frac{r}{2})$. Puisque

$$f\left(\frac{r}{2}, 0\right) > 0 \quad \text{et} \quad f\left(0, \frac{r}{2}\right) < 0,$$

le point $(0, 0)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local. \triangle

Définition 2.1.13 (Point de selle). Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{a} \in A$. On dit que \mathbf{a} (ou le point correspondant $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ sur le graphe de f) est un *point de selle* si $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, mais \mathbf{a} n'est pas un extremum local de f .

Dans l'Exemple 2.1.12, $(0, 0, 0)$ est un point de selle pour f .

Exemple 2.1.14. Trouvons les points critiques de la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y + xy^2 + xy.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + y^2 + y = y(2x + y + 1), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 2xy + x = x(x + 2y + 1). \end{aligned}$$

Puisque f est différentiable en tout point, on doit résoudre $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. On a donc

$$y(2x + y + 1) = 0 \quad \text{et} \quad x(x + 2y + 1) = 0.$$

Ainsi

$$(y = 0 \text{ ou } 2x + y + 1 = 0) \quad \text{et} \quad (x = 0 \text{ ou } x + 2y + 1 = 0).$$

Il y a donc quatre cas :

- $x = 0$ et $y = 0$.
- $y = 0$ et $x + 2y + 1 = 0$, ce qui implique que $x = -1$.
- $2x + y + 1 = 0$ et $x = 0$, ce qui implique que $y = -1$.
- $2x + y + 1 = 0$ et $x + 2y + 1 = 0$. En résolvant ce système linéaire (exercice !), on obtient $x = y = -\frac{1}{3}$.

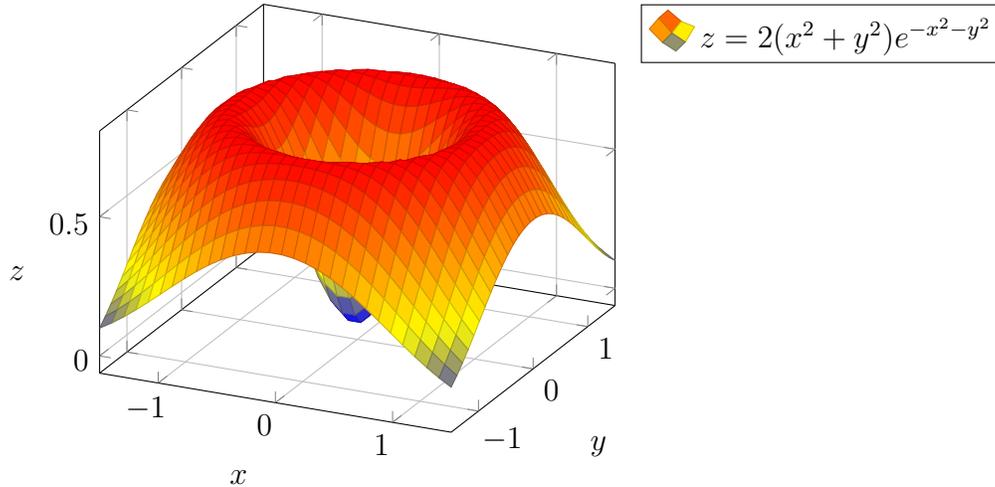
Il existe donc quatre points critiques :

$$(0, 0), \quad (-1, 0), \quad (0, -1), \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Si f a des extrema locaux, alors ils doivent être parmi ces points. Nous reviendrons sur cet exemple dans l'Exemple 2.2.5. \triangle

Exercices.

2.1.1. On considère la fonction $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$, dont le graphe est le suivant :



Trouver les points critiques de f .

Exercices tirés de [FRYb, §2.9] : Q1–Q3

2.2 Test de la dérivée seconde

Si on recherche les extrema d'une fonction, le test de la dérivée première (Théorème 2.1.10) nous permet de limiter notre attention aux points critiques. Cependant, une fois que nous avons trouvé les points critiques, comment déterminer s'il s'agit d'extremum? Un outil utile est le *test de la dérivée seconde*, que nous allons maintenant explorer. Nous avons d'abord besoin de quelques notions d'algèbre linéaire.

Notez que, si $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, alors $\mathbf{h}^\top B \mathbf{h}$ est une matrice 1×1 , que nous considérons également comme un nombre réel.

Définition 2.2.1 (Matrice définie positive/négative). Une matrice carrée $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est *définie positive* si

$$\mathbf{h}^\top B \mathbf{h} > 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{h} \neq \mathbf{0}.$$

La matrice B est *définie négative* si

$$\mathbf{h}^\top B \mathbf{h} < 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{h} \neq \mathbf{0}.$$

(Notez qu'une matrice ne peut être ni définie positive ni définie négative.)

Pour une matrice

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

on définit les sous-matrices

$$B^{(1)} = [b_{11}], \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad B^{(n)} = B.$$

En d'autres termes, pour $1 \leq m \leq n$, $B^{(m)}$ est la sous-matrice supérieure gauche $m \times m$ de B . Rappelons que la matrice B est *symétrique* si $b_{ij} = b_{ji}$ pour $1 \leq i, j \leq m$. Pour les matrices symétriques, il existe un moyen simple de déterminer si elles sont définies positives ou négatives.

Proposition 2.2.2. *Supposons que $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est symétrique.*

(a) *La matrice B est définie positive si et seulement si*

$$\det(B^{(m)}) > 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq m \leq n.$$

(b) *La matrice B est définie négative si et seulement si, pour $1 \leq m \leq n$,*

$$\det(B^{(m)}) < 0 \quad \text{si } m \text{ est impair}$$

et

$$\det(B^{(m)}) > 0 \quad \text{si } m \text{ est pair.}$$

Proof. Pour une démonstration de ce résultat, voir [Nic, Th. 8.3.3]. □

Rappelez-vous la matrice hessienne dans (1.18)

$$\mathbf{H}f(\mathbf{a}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Si f est de classe C^2 en \mathbf{a} , alors il découle du théorème de Clairaut (Théorème 1.9.6) que $\mathbf{H}f(\mathbf{a})$ est une matrice symétrique.

Théorème 2.2.3 (Test de la dérivée seconde). *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert, $\mathbf{x}_0 \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , et $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.*

(a) *Si $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$ est définie positive, alors \mathbf{x}_0 est un minimum local.*

(b) *Si $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$ est définie négative, alors \mathbf{x}_0 est un maximum local.*

(c) *Si $\det(\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)) \neq 0$ et $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$ n'est ni définie positive ni définie négative, alors \mathbf{x}_0 est un point de selle.*

(d) *Si $\det(\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)) = 0$, alors on ne peut tirer de conclusion sans travail supplémentaire.*

Proof. Pour une démonstration détaillée, voir [MT11, §3.3, Th. 5]. Pour avoir une idée générale, notez que, lorsque $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, le polynôme de Taylor de degré 2 dans (1.19) devient

$$p_2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^\top (\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)) \mathbf{h}.$$

Si $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$ est définie positive, alors $p_2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) > f(\mathbf{x}_0)$ pour $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. Puisque p_2 est une bonne approximation de f près de \mathbf{x}_0 , ceci implique que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ pour \mathbf{x} près de \mathbf{x}_0 , et donc que \mathbf{x}_0 est un minimum local. De même, si $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$ est définie négative, alors $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ pour \mathbf{x} près de \mathbf{x}_0 , et donc \mathbf{x}_0 est un maximum local. \square

Il peut être utile, à titre de référence, de donner explicitement le test de la dérivée seconde dans le cas $n = 2$.

Corollaire 2.2.4 (Test de la dérivée seconde en deux variables). *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est ouvert, $(a, b) \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , et $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. On a alors*

$$\det(\mathbf{H}f(a, b)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2.$$

(a) Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{H}f(a, b)) > 0,$$

alors (a, b) est un minimum local.

(b) Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{H}f(a, b)) > 0,$$

alors (a, b) est un maximum local.

(c) Si

$$\det(\mathbf{H}f(a, b)) < 0,$$

alors (a, b) est un point de selle.

(d) Si

$$\det(\mathbf{H}f(a, b)) = 0,$$

alors nous ne pouvons tirer de conclusion sans effectuer un effort supplémentaire.

Exemple 2.2.5. Considérons à nouveau la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y + xy^2 + xy.$$

Dans l'Exemple 2.1.14, nous avons trouvé que les points critiques de f sont

$$(0, 0), \quad (-1, 0), \quad (0, -1), \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Les dérivées partielles secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.$$

Par conséquent, la matrice hessienne est

$$\mathbf{H}f = [2y \quad 2x + 2y + 1 \quad 2x + 2y + 1 \quad 2x],$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{H}f(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}f(-1,0) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}f(0,-1) &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ N - [1ex] - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

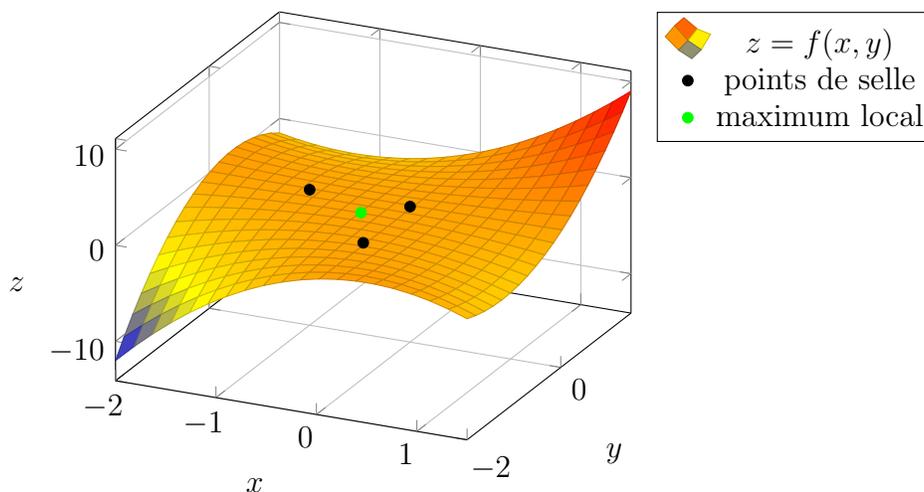
On peut alors examiner les points critiques :

- Puisque $\det(\mathbf{H}f(0,0)) = -1 < 0$, le point $(0,0,0)$ est un point de selle.
- Puisque $\det(\mathbf{H}f(-1,0)) = -1 < 0$, le point $(-1,0,0)$ est un point de selle.
- Puisque $\det(\mathbf{H}f(0,-1)) = -1 < 0$, le point $(0,-1,0)$ est un point de selle.
- Puisque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} < 0 \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{H}f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0,$$

la fonction atteint un maximum local en $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

En fait, le graphe de f se présente comme suit : fact, the graph of f looks as follows:



On voit que notre maximum local *n'est pas* un maximum global. △

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §2.9]: Q4–Q29

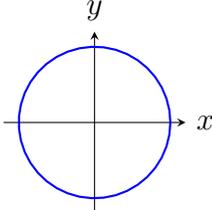
2.3 Extrema sous contrainte(s)

Nous souhaitons souvent maximiser ou minimiser une fonction sujette à une certaine *contrainte*. Géométriquement, cette contrainte signifie que nous voulons restreindre le domaine de notre fonction.

Exemple 2.3.1. Considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{3}x - y.$$

Nous voulons trouver la valeur maximale ou minimale de cette fonction, mais pas sur l'ensemble de son domaine \mathbb{R}^2 . Nous voulons plutôt trouver la valeur maximale sur le cercle unitaire :

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\},$$


Une façon de résoudre ce problème serait de paramétrer le cercle, de composer f avec la paramétrisation, puis de trouver les extrema comme d'habitude. Puisque

$$S = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\},$$

nous pouvons trouver les extrema de

$$h(t) := f(\cos t, \sin t) = \sqrt{3} \cos t - \sin t.$$

Ceci est maintenant un problème de calcul différentiel à une variable. Nous résolvons

$$0 = h'(t) = -\sqrt{3} \sin t - \cos t \implies \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \implies t = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } t = \frac{5\pi}{6}.$$

Pour $t = -\frac{\pi}{6}$, on a

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin t = -\frac{1}{2}, \quad f(\cos t, \sin t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Pour $t = \frac{5\pi}{6}$, on a

$$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin t = \frac{1}{2}, \quad f(\cos t, \sin t) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2.$$

Puisque le domaine de h est $[0, 2\pi]$, qui est un intervalle fermé et borné (donc compact), on sait que h atteint un maximum et un minimum (selon le théorème des valeurs extrêmes). Par conséquent, la valeur maximale de f sur le cercle unité est de 2 au point $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, et la valeur minimale de f sur le cercle unité est de -2 au point $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. \triangle

En théorie, nous pouvons également adopter une approche similaire pour trouver les extrema des fonctions restreintes aux surfaces. Dans ce cas, notre paramétrisation impliquera deux variables, et nous réduirons le problème à la recherche d'un extremum pour une fonction à deux variables.

Cependant, l'approche ci-dessus présente certaines limitations :

- Il n'est pas toujours facile de trouver la paramétrisation d'une contrainte.
- Cette approche peut parfois être compliquée, surtout si la paramétrisation est complexe.
- Cette approche n'est pas aussi élégante que la méthode du multiplicateur de Lagrange que nous allons développer dans la prochaine section.

2.4 Multiplicateurs de Lagrange

Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYc, §2.10].

Rappelons que si $f: A \rightarrow B$ est une fonction et $S \subseteq A$, alors

$$f|_S: S \rightarrow B, \quad f|_S(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}),$$

est la *restriction* de f sur S . Trouver les extrema de $f|_S$ revient à trouver les extrema de f sous la contrainte que les points sont situés dans S . Par exemple, $\mathbf{a} \in S$ est un minimum local pour $f|_S$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap S.$$

Théorème 2.4.1 (multiplicateurs de Lagrange). *Supposons que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert et que $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 . De plus, supposons que $k \in \mathbb{R}$ et que*

$$S = \{\mathbf{x} \in U : g(\mathbf{x}) = k\}.$$

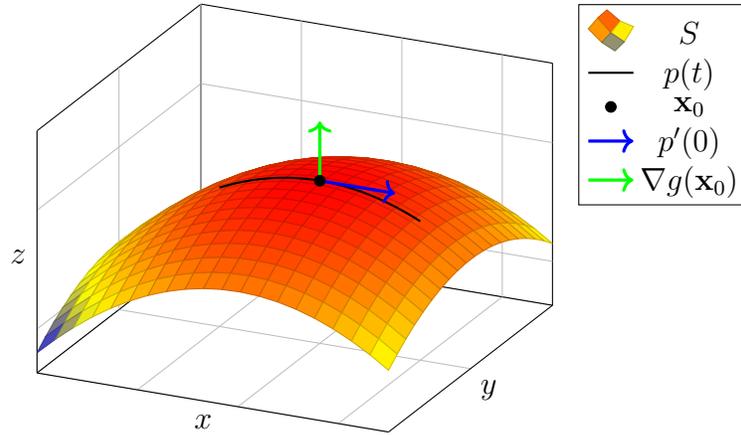
Si $\mathbf{x}_0 \in S$ est un extremum local pour $f|_S$, alors $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ et $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ sont linéairement dépendants, c'est-à-dire, ou bien

- $\nabla g(\mathbf{x}_0) = 0$, ou bien
- $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ (possiblement $\lambda = 0$). Le nombre λ est appelé un multiplicateur de Lagrange.

On appelle le point \mathbf{x}_0 , où $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ et $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ sont linéairement dépendants, un *point critique*.

Proof. Soit $\mathbf{x}_0 \in S$ un extremum local pour $f|_S$. Supposons que nous ayons un chemin de classe C^1 dans S passant par \mathbf{x}_0 . Plus précisément, supposons que l'on ait une fonction C^1 .

$$p: [-1, 1] \rightarrow S, \quad p(0) = \mathbf{x}_0.$$



Alors la fonction

$$f \circ p: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

a un extremum local en 0. Puisqu'elle est de classe C^1 , cela implique que sa dérivée est nulle. En utilisant la règle de la composée (Théorème 1.6.2), on a

$$0 = (f \circ p)'(\mathbf{x}_0) = \nabla f(p(0)) \cdot p'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot p'(0) \implies \nabla f(\mathbf{x}_0) \perp p'(0).$$

Puisque ceci est vrai pour *tous* les chemins dans S qui passent par \mathbf{x}_0 au temps 0, on voit que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ est orthogonale à *tous* vecteurs tangents à S en \mathbf{x}_0 . Ainsi, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ est orthogonale à S en \mathbf{x}_0 .

Mais nous savons déjà, par le biais de la Proposition 1.8.6, que $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ est orthogonal à S en \mathbf{x}_0 . Par conséquent, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ et $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ sont des vecteurs parallèles. En d'autres termes, ils sont linéairement dépendants. \square

Exemple 2.4.2. Revenons sur l'Exemple 2.3.1 et trouvons les extrema en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous définissons

$$g(x, y) = x^2 + y^2,$$

et nous voulons trouver les extrema de

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{3}x - y,$$

sous la contrainte

$$g(x, y) = 1.$$

On a

$$\nabla f = (\sqrt{3}, -1), \quad \nabla g = (2x, 2y).$$

Puisque ∇g est nul uniquement en $(0, 0)$, ce qui ne satisfait pas la contrainte $g(x, y) = 1$, on veut résoudre l'équation vectorielle $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$. Ainsi, nous voulons résoudre

$$(\sqrt{3}, -1) = \lambda(2x, 2y).$$

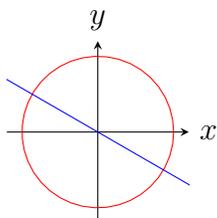
On a donc trois équations à trois variables (n'oubliez pas la contrainte !):

$$2\lambda x = \sqrt{3}, \quad 2\lambda y = -1, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Il découle des deux premières équations que $\lambda \neq 0$. Ainsi, nous pouvons résoudre ces deux premières équations pour x et y , ce qui donne

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}, -\frac{1}{2\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right). \quad (2.1)$$

Notez qu'il s'agit de l'équation paramétrique d'une droite passant par l'origine (en éliminant l'origine, puisque $1/\lambda$ ne peut jamais être nul). On veut trouver les points d'intersection de cette droite avec le cercle unitaire.



Pour trouver ces points d'intersection, nous substituons l'expression pour x et y de (2.1) dans la contrainte, pour obtenir

$$1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\lambda} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda} \right)^2 \implies 4\lambda^2 = 3 + 1 \implies \lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1.$$

En substituant ces deux valeurs pour λ dans (2.1), on obtient les points suivants

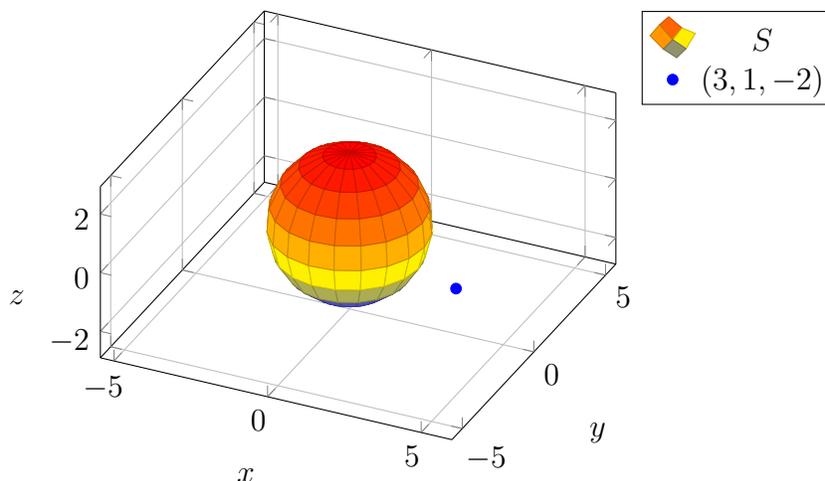
$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Ce sont les mêmes points que nous avons trouvés dans l'Exemple 2.3.1, où nous avons alors conclu que la valeur maximale de f sur le cercle unitaire est 2 au point $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$, et la valeur minimale de f sur le cercle unitaire est -2 au point $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$. \triangle

Exemple 2.4.3. Trouvez le point sur la sphère

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$$

le plus proche du point $(3, 1, -2)$.



Au lieu de minimiser la distance, nous minimiserons le carré de la distance à $(3, 1, -2)$, car cela permet d'éviter des racines carrées fastidieuses. (Puisque la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante, le carré de la distance atteint son minimum précisément là où la distance atteint son minimum). Ainsi, on minimisera la fonction

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2$$

sous la contrainte

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$

On a

$$\nabla f(x, y, z) = (2(x - 3), 2(y - 1), 2(z + 2)), \quad \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

On doit donc résoudre les équations

$$2(x - 3) = 2\lambda x \quad \iff \quad x = \frac{3}{1 - \lambda} \quad (2.2)$$

$$2(y - 1) = 2\lambda y \quad \iff \quad y = \frac{1}{1 - \lambda} \quad (2.3)$$

$$2(z + 2) = 2\lambda z \quad \iff \quad z = -\frac{2}{1 - \lambda} \quad (2.4)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6. \quad (2.5)$$

(Notez que, dans la première équation, $\lambda = 1$ donne la contradiction $-6 = 0$. Nous pouvons donc supposer que $\lambda \neq 1$, ce qui nous permettra de diviser par $1 - \lambda$). En substituant (2.2), (2.3) et (2.4) dans (2.5), on obtient

$$\frac{14}{(1 - \lambda)^2} = 6 \implies 6(1 - \lambda)^2 = 14 \implies 3\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0 \implies \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{3},$$

où on a utilisé la formule quadratique dans la dernière étape. En substituant ensuite ces valeurs de λ dans (2.2), (2.3) et (2.4) on obtient

$$(x, y, z) = \left(\mp \frac{9}{\sqrt{21}}, \mp \frac{3}{\sqrt{21}}, \pm \frac{6}{\sqrt{21}} \right).$$

Le point $\left(\frac{9}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}}, -\frac{6}{\sqrt{21}} \right)$ est clairement plus proche de $(3, 1, -2)$ que le point $\left(-\frac{9}{\sqrt{21}}, -\frac{3}{\sqrt{21}}, \frac{6}{\sqrt{21}} \right)$.
Donc le point le plus proche est $\left(\frac{9}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}}, -\frac{6}{\sqrt{21}} \right)$ et le point le plus éloigné est $\left(-\frac{9}{\sqrt{21}}, -\frac{3}{\sqrt{21}}, \frac{6}{\sqrt{21}} \right)$.
△

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §2.10]: Q1–Q9, Q12, Q13, Q15–25, Q27, Q28.

2.5 Contraintes multiples

Dans la Section 2.4, nous avons vu comment utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour maximiser ou minimiser une fonction sous une *seule* contrainte. Cependant, nous souhaitons parfois maximiser ou minimiser une fonction en tenant compte de *plusieurs* contraintes. Il s'avère que la méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être généralisée pour s'adapter à ce scénario! Pour une référence traitant de deux contraintes, voir [FRYc, §2.10.1].

Rappelons que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sont *linéairement dépendants* s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

De manière équivalente, les vecteurs sont linéairement dépendants si au moins l'un d'entre eux peut être écrit comme une combinaison linéaire des autres.

Théorème 2.5.1 (Multiplicateurs de Lagrange, contraintes multiples). *Supposons que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert,*

$$f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions C^1 , et $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$. Soit

$$S = \{\mathbf{x} \in U : g_i(\mathbf{x}) = k_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, r\}.$$

Si $\mathbf{x}_0 \in S$ est un extrema local pour $f|_S$, alors les vecteurs

$$\nabla f(\mathbf{x}_0), \nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_r(\mathbf{x}_0)$$

sont linéairement dépendantes.

Exemple 2.5.2. Trouvons les extrema de

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x - y,$$

sous les contraintes suivantes

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11 \quad \text{et} \quad g_2(x, y, z) = x + y + z = 3.$$

On peut montrer que l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 11 \text{ et } g_2(x, y, z) = 3\}$$

contient sa frontière. Ainsi, selon le théorème des valeurs extrêmes (Théorème 2.1.7), $f|_S$ atteint un maximum et un minimum dans S . Nous pouvons donc utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver ces extrema.

Pour cela, on calcule

$$\nabla f = (1, -1, 0), \quad \nabla g_1 = (2x, 2y, 2z), \quad \nabla g_2 = (1, 1, 1).$$

Puisque ∇f et ∇g_2 sont clairement linéairement indépendants¹, ces trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si ∇g_1 peut être écrit comme une combinaison linéaire de ∇f et ∇g_2 . On a alors

$$\nabla g_1 = \lambda_1 \nabla f + \lambda_2 \nabla g_2$$

pour certains $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on doit résoudre les équations suivantes :

$$2x = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{2.6}$$

$$2y = -\lambda_1 + \lambda_2 \tag{2.7}$$

$$2z = \lambda_2 \tag{2.8}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11 \tag{2.9}$$

$$x + y + z = 3 \tag{2.10}$$

En additionnant (2.6) et (2.7), puis en utilisant (2.8), on obtient

$$2x + 2y = 2\lambda_2 = 4z \implies x + y = 2z.$$

En substituant ensuite ceci dans (2.10), on obtient

$$2z + z = 3 \implies z = 1.$$

Il en découle que

$$x + y = 2 \implies x = 2 - y.$$

Puis, en substituant dans (2.9), on obtient

$$\begin{aligned} (2 - y)^2 + y^2 + 1^2 &= 11 \\ \implies y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ \implies (y - 3)(y + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $y = 3$ ou $y = -1$, ce qui donne $x = -1$ ou $x = 3$, respectivement. Par conséquent, les extrema se présentent aux points suivants

$$(-1, 3, 1) \quad \text{et} \quad (3, -1, 1).$$

Puisque $f(-1, 3, 1) = -1 - 3 = -4$ et $f(3, -1, 1) = 3 - (-1) = 4$, on voit que $f|_S$ atteint son minimum en $(-1, 3, 1)$ et son maximum en $(3, -1, 1)$. \triangle

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §2.10]: Q10, Q11, Q14, Q26.

¹Rappelez-vous que deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un est un multiple par scalaire de l'autre.

2.6 Comment trouver les extrema globaux

Réunissons maintenant tout ce que nous avons appris dans ce chapitre. Jusqu'à présent, nous avons développé des techniques pour trouver les extrema *locaux*. Comment trouver les extrema *globaux* d'une fonction f dans un ensemble S ? Puisque tout extremum global est un extremum local, les deux processus sont liés. Cependant, comme tout extremum local n'est pas un extremum global, nous avons encore du travail à faire.

La première étape consiste à déterminer si les extrema globaux existent ou non ! Pour cela, l'un de nos outils les plus efficaces est le théorème des valeurs extrêmes (Théorème 2.1.7). Si S est compact (rappelons que cela signifie qu'il est borné et contient sa limite) et que f est continu, le théorème des valeurs extrêmes nous dit que f atteint effectivement un maximum et un minimum globaux dans S . Il suffit donc de trouver les extrema locaux, puis de voir lequel d'entre eux présente la plus grande valeur (ce sera le maximum global) et lequel présente la plus petite valeur (ce sera le minimum global).

La situation est beaucoup plus compliquée si S n'est pas compact. Si S n'est pas compact, nous devons examiner le comportement limitant de f lorsque $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ou $\mathbf{x} \rightarrow \partial S$ pour décider si f est même borné et, si oui, s'il a ou non un maximum et/ou un minimum globaux. Faire cela n'est généralement pas si difficile pour les fonctions en une seule variable, mais généralement beaucoup plus difficile pour les fonctions à plusieurs variables.

Dans ce document, nous étudierons principalement le cas où S est compact. Typiquement, notre ensemble S sera un ensemble compact de la forme

$$S = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq k\}$$

pour une fonction $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $A \subseteq \mathbb{R}^n$, et un scalaire $k \in \mathbb{R}$. Alors la frontière sera souvent (mais pas toujours !) donnée par

$$\partial S = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = k\}.$$

Nous divisons ensuite notre recherche des extrema locaux en deux parties :

- (a) Nous trouvons les points critiques dans $S \setminus \partial S$. Pour cela, nous utiliserons le test de la dérivée première.
- (b) Nous trouvons les points critiques dans la frontière ∂S . Pour cela, nous utiliserons la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

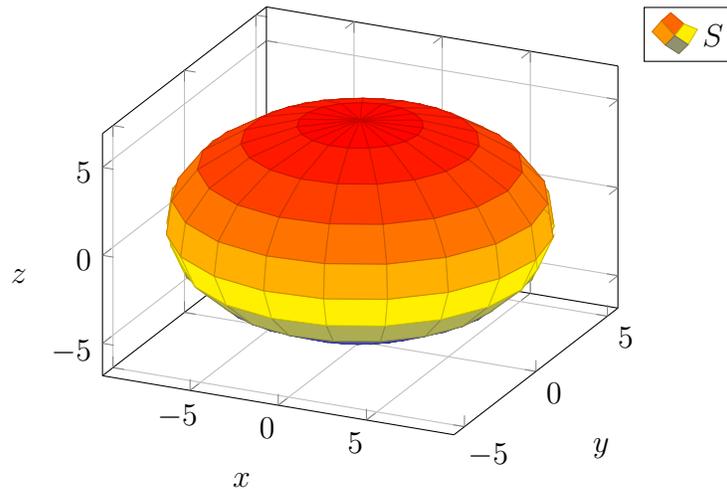
Exemple 2.6.1. Trouvons les extrema globaux (s'ils existent) de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^3$$

dans l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) := x^2 + 3y^2 + 3z^2 \leq 100\}.$$

Donc S est un ellipsoïde plein comme le montre la figure ci-dessous:



L'ensemble S est borné et contient sa frontière

$$\partial S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 100\}.$$

Par conséquent, selon le théorème des valeurs extrêmes (Théorème 2.1.7), f atteint un minimum et un maximum globaux dans S .

On cherche d'abord les points critiques de f à l'intérieur, soit dans $S \setminus \partial S$. On résout donc

$$(0, 0, 0) = \nabla f = (2x, 3y^2, 3z^2) \implies x = y = z = 0.$$

N'oubliez pas de vérifier que les points trouvés sont bien dans S ! Ici, on a

$$0^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2 = 0 \leq 100,$$

et donc $(0, 0, 0) \in S$.

On considère maintenant la frontière de S , qui est l'ellipsoïde

$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 100\}.$$

On a

$$\nabla g = (2x, 6y, 6z).$$

Notez que $\nabla g = (0, 0, 0)$ impliquerait que $x = y = z = 0$. Puisque $(0, 0, 0) \notin \partial S$, on voit que ∇g ne s'annule jamais sur ∂S . Donc ∇f et ∇g sont linéairement dépendants si et seulement si $\nabla f = \lambda \nabla g$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent, les équations de Lagrange deviennent :

$$2x = 2\lambda x \tag{2.11}$$

$$3y^2 = 6\lambda y \tag{2.12}$$

$$3z^2 = 6\lambda z \tag{2.13}$$

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 100 \quad (2.14)$$

Des équations (2.11), (2.12) et (2.13), on a

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x = 0 &\implies x = 0 \text{ or } \lambda = 1, \\ (y - 2\lambda)y = 0 &\implies y = 0 \text{ or } y = 2\lambda, \\ (z - 2\lambda)z = 0 &\implies z = 0 \text{ or } z = 2\lambda. \end{aligned}$$

En considérant toutes les possibilités ci-dessus ainsi que la contrainte (2.14), on obtient les points critiques suivants (y compris celui que nous avons trouvé à l'intérieur de S), accompagnés de la valeur correspondante de la fonction f :

Point critique	$f(x, y, z)$
$(0, 0, 0)$	0
$(0, 0, \pm 10/\sqrt{3})$	$\pm 1000/3\sqrt{3}$
$(0, \pm 10\sqrt{3}, 0)$	$\pm 1000/3\sqrt{3}$
$\pm(0, 5/\sqrt{6}, 5/\sqrt{6})$	$125/3\sqrt{6}$
$(\pm 10, 0, 0)$	100
$(\pm 2\sqrt{19}, 2, 2)$	92
$(\pm 2\sqrt{22}, 0, 2)$	96
$(\pm 2\sqrt{22}, 2, 0)$	96

Notez que $1000/3\sqrt{3} \approx 192.45$ et $125/3\sqrt{6} \approx 17.01$. Ainsi, f atteint sa valeur maximale de $1000/3\sqrt{3}$ aux points $(0, 0, 10/\sqrt{3})$ et $(0, 10/\sqrt{3}, 0)$ et elle atteint sa valeur minimale de $-1000/3\sqrt{3}$ aux points $(0, 0, -10/\sqrt{3})$ et $(0, -10/\sqrt{3}, 0)$. \triangle

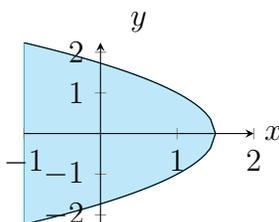
Exemple 2.6.2. Trouvons les extrema globaux, s'ils existent, de

$$f(x, y) = x^2 + 2y$$

dans l'ensemble

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) := 2x + y^2 \leq 3\}.$$

L'ensemble S est le suivant :



Sa frontière est

$$\partial S = \{(x, y) : g(x, y) = 3\}.$$

Notez que S est *n'est pas* borné, et donc on *ne peut pas* appliquer le théorème des valeurs extrêmes (Théorème 2.1.7) pour conclure que f a un maximum ou un minimum globaux dans l'ensemble S .

Néanmoins, nous commençons par trouver les points critiques à l'intérieur de S . Puisque

$$\nabla f = (2x, 2) \neq (0, 0),$$

de tels points critiques n'existent pas.

Ensuite, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les points critiques à la frontière. Puisque $\nabla g = (2, 2y)$ n'est jamais nul, les équations de Lagrange deviennent :

$$2x = 2\lambda \tag{2.15}$$

$$2 = 2\lambda y \tag{2.16}$$

$$2x + y^2 = 3 \tag{2.17}$$

L'équation (2.15) implique que $x = \lambda$, tandis que (2.16) implique que $y = \frac{1}{\lambda}$. (Notez que $\lambda = 0$ contredit (2.16), et donc on peut diviser par λ). En substituant dans (2.17), on obtient

$$2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} = 3 \implies \frac{2}{y} + y^2 = 3.$$

(Notez que $y = 0$ contredirait (2.16), et donc on a $y \neq 0$.) En multipliant par y , on a

$$y^3 - 3y + 2 = 0.$$

Puisque $y = 1$ est clairement une solution, nous pouvons utiliser la division euclidienne des polynômes pour trouver les autres facteurs :

$$y^3 - 3y + 2 = (y - 1)(y^2 + y - 2) = (y - 1)^2(y + 2).$$

Par conséquent, on a $y = 1$ ou $y = -2$. Lorsque $y = 1$, on a $x = \lambda = \frac{1}{y} = 1$. Lorsque $y = -2$, on a $x = -\frac{1}{2}$. Ainsi, les points critiques dans ∂S sont

$$(1, 1) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{1}{2}, -2\right).$$

Maintenant,

$$f(1, 1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{1}{2}, -2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2(-2) = -\frac{15}{4}.$$

Est-ce que les points que nous avons trouvés sont des extrema globaux ? Notez que $(x, 0) \in S$ pour toute valeur négative de x arbitrairement grande. Puisque $f(x, 0) = x^2$, cela signifie que f prend des valeurs arbitrairement grandes sur S . Donc f n'a pas de maximum global dans S . Puisqu'il n'existe aucun autre point critique dans S , la fonction f atteint *donc* la valeur minimale de $-\frac{15}{4}$ au point $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$. (Nous utilisons ici le fait que $f(x, y) \rightarrow \infty$ quand $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$.) △

Exercices.

2.6.1. Trouvez les valeurs maximales et minimales absolues de $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 7$ sur $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2.6.2. Trouvez et classez les valeurs extrêmes (s'il y en a) des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 suivantes :

(a) $x^2 - y^5$

(b) $(x + 1)^2 + (x - y)^2$.

(c) $x^2 + xy^2 + y^4$

2.6.3. Trouver les valeurs maximale et minimale de $f(x, y) = xy - y + x - 1$ sous la condition $x^2 + y^2 \leq 2$.

Chapitre 3

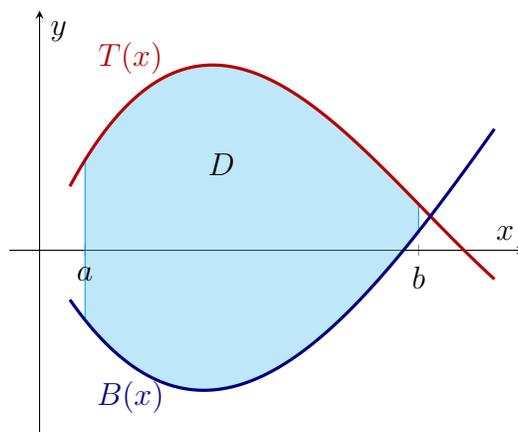
Intégrales doubles et triples

Dans les cours de calcul préalable, vous avez appris à calculer des intégrales en une variable, telles que $\int_a^b f(x) dx$. Dans ce chapitre, on étudiera l'intégration en deux et trois dimensions. On commencera dans la Section 3.1 et la Section 3.2 par une approche informelle, en discutant de la façon dont on calcule les intégrales doubles en pratique (via les intégrales itérées). Ensuite, on donnera une définition plus précise de l'intégrale double dans les sections: Section 3.3, Section 3.4 et Section 3.5. Enfin, dans la Section 3.7, on abordera l'intégration en trois dimensions. Une bonne référence pour le matériel de ce chapitre est [FRYc, §3.1–3.4].

3.1 Sections verticales

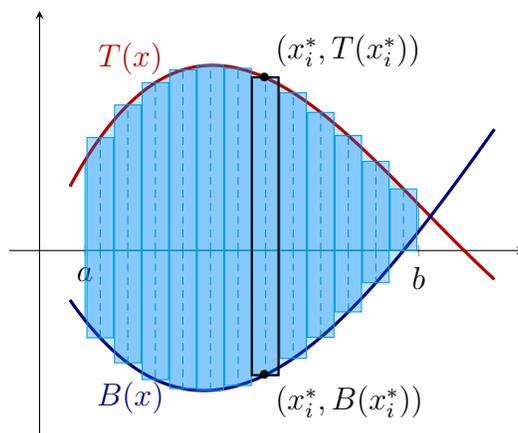
Supposons que l'on souhaite calculer la masse d'un objet bidimensionnel occupant une région D dans le plan xy . On doit d'abord savoir la densité de cet objet, qui peut dépendre de la position. Soit $f(x, y)$ la densité au point (x, y) . Pour simplifier, supposons que D est la région comprise entre une courbe inférieure $y = B(x)$ et une courbe supérieure $y = T(x)$, avec x allant de a à b . Ainsi,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, B(x) \leq y \leq T(x)\}.$$



Cependant, si on veut calculer l'aire de D (au lieu de sa masse), on a vu en calcul différentiel en une variable que l'on doit approcher la région par des rectangles, que l'on

appelle *section*. À cette fin, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles et on choisit un point x_i^* dans le i -ème intervalle. Ensuite, pour chaque intervalle, on dessine un rectangle sur cet intervalle dont le côté supérieur à la hauteur $T(x_i^*)$ et le côté inférieur à la hauteur $B(x_i^*)$.



La somme des aires des tranches (appelée la somme de Riemann) est

$$\sum_{i=1}^n (T(x_i^*) - B(x_i^*)) \Delta x \quad \text{où } \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

On prend ensuite la limite quand $n \rightarrow \infty$. Si cette limite existe, elle correspond à l'aire entre les deux courbes:

$$\text{Aire} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (T(x_i^*) - B(x_i^*)) \Delta x = \int_a^b (T(x) - B(x)) dx.$$

Il nous faut modifier cette procédure afin de calculer la masse de D , au lieu de son aire. Pour cela, nous devons remplacer notre approximation $(T(x_i^*) - B(x_i^*)) \Delta x$ de l'aire de la i -ème section de D par une approximation de la masse de cette section. Pour cela, on subdivise la tranche en m rectangles de hauteur

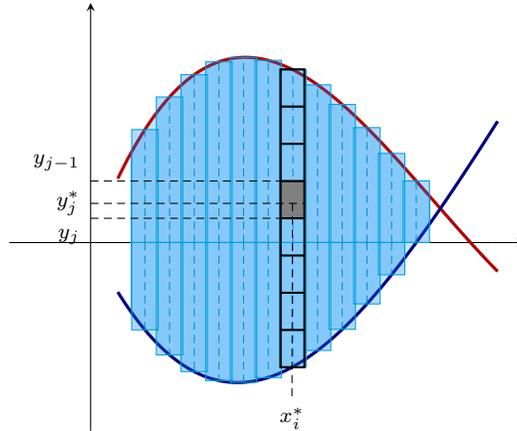
$$\Delta y = \frac{T(x_i^*) - B(x_i^*)}{m}.$$

Soit

$$y_j = B(x_i^*) + j \Delta y$$

la coordonnée y du sommet du j -ème rectangle. Pour chaque $j = 1, \dots, m$, on choisit un nombre y_j^* entre y_{j-1} et y_j . On approche alors la densité sur le j -ème rectangle dans la i -ème

section par la constante $f(x_i^*, y_j^*)$.



La masse du j -ème rectangle dans la i -ème section est approximativement

$$f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y.$$

En prenant la limite quand $m \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire la limite lorsque la hauteur des rectangles tend vers zéro), la somme de Riemann devient une intégrale:

$$\text{Masse de la } i\text{-ème section} \approx \Delta x \int_{B(x_i^*)}^{T(x_i^*)} f(x_i^*, y) dy = F(x_i^*) \Delta x,$$

où

$$F(x) = \int_{B(x)}^{T(x)} f(x, y) dy.$$

Remarquez qu'on a commencé avec une fonction $f(x, y)$, et qu'on a « intégré » par rapport à la variable y et on a obtenu une fonction $F(x)$ en la variable x .

On prend ensuite la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire la limite quand l'épaisseur des sections tend vers zéro). On obtient ainsi

$$\text{Masse} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \int_{B(x_i^*)}^{T(x_i^*)} f(x_i^*, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x.$$

Remarques ensuite que la somme

$$\sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x$$

est la somme de Riemann approchant l'intégrale $\int_a^b F(x) dx$. Ainsi,

$$\text{Masse} = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_{B(x)}^{T(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Notation 3.1.1 (Intégrale double).

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_{B(x)}^{T(x)} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{B(x)}^{T(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Les trois dernières intégrales sont appelées des *intégrales itérées*. Notez l'ordre des dx et dy dans ces intégrales itérées. Les signes des intégrales (et leurs bornes d'intégration) correspondent aux dx ou dy de la même manière que les parenthèses dans une expression mathématique.

Exemple 3.1.2. Soit D la région située au-dessus de la courbe $x^2 = 9y$ et à droite de la courbe $3y^2 = x$. Calculons

$$\iint_D xy dx dy.$$

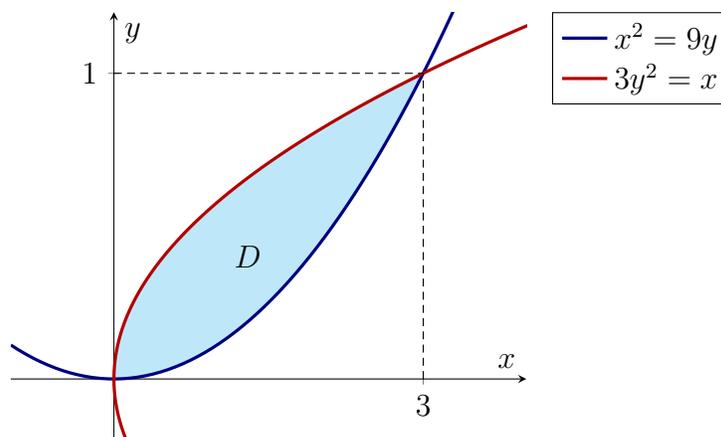
Les courbes se coupent en des points (x, y) qui satisfont aux deux conditions suivantes

$$x^2 = 9y \quad \text{et} \quad 3y^2 = x.$$

Ainsi, on a

$$y = \frac{x^2}{9} = \frac{(3y^2)^2}{9} = y^4 \implies y^4 - y = 0 \implies y(y^3 - 1) = 0 \implies y = 0 \text{ or } y = 1.$$

Par conséquent, les courbes se croisent en $(0, 0)$ et $(3, 1)$. La région D est donc la suivante:



Pour $0 \leq x \leq 3$, la frontière inférieure de la région D est donnée par $y = \frac{x^2}{9}$ et la frontière supérieure est donnée par $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$. Ainsi, on a

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^3 \left(\int_{x^2/9}^{\sqrt{x/3}} xy dy \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=x^2/9}^{\sqrt{x/3}} \right) dx \\
&= \int_0^3 \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^5}{162} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{18} - \frac{x^6}{6 \cdot 162} \right]_0^3 \\
&= \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Notez qu'on a d'abord intégré par rapport à y , en considérant x comme une constante, puis par rapport à x . \triangle

Exemple 3.1.3. Si $f(x, y) = 1$ pour tout $(x, y) \in D$, alors on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{B(x)}^{T(x)} dy = \int_a^b [y]_{B(x)}^{T(x)} dx = \int_a^b (T(x) - B(x)) dx.$$

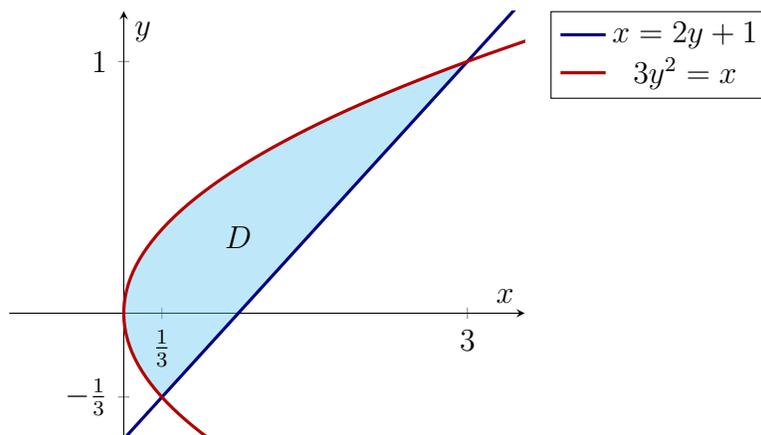
C'est précisément la formule de l'aire entre deux courbes que vous avez appris en calcul différentiel en une variable! \triangle

Exercices.

On reporte les Exercices jusqu'à la Section 3.6.

3.2 Sections horizontales

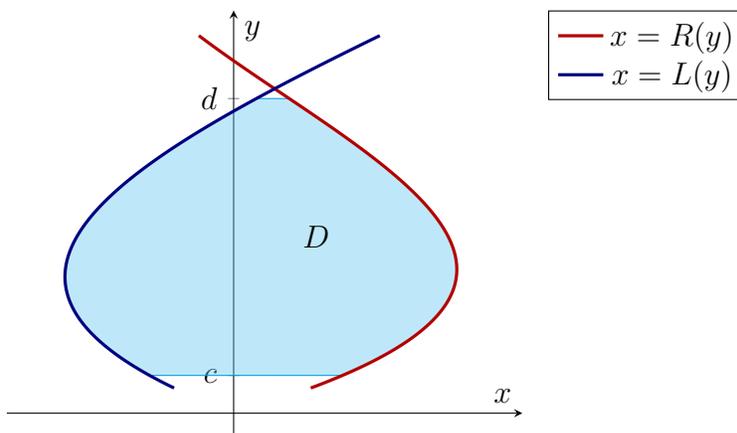
Dans la Section 3.1, pour intégrer sur une région D , on a approché la région par des sections verticales. Comme on peut s'y attendre, nous pouvons également approcher la région par des sections *horizontales*. Il est très utile d'avoir la possibilité d'utiliser l'une ou l'autre méthode. Par exemple, considérons la région suivante:



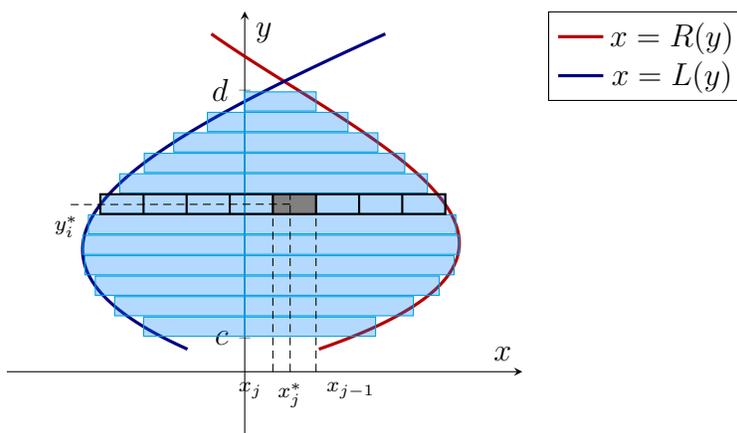
En utilisant la méthode de la section verticale, il faudrait diviser la région D en deux parties. Pour $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, la région est bornée en haut par la courbe $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ et en bas par la courbe $y = -\sqrt{\frac{x}{3}}$. Puis, pour $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$, la région est bornée en haut par $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ et en bas par $y = \frac{x-1}{2}$. D'autre part, la région D est simplement décrite par la région située à droite de la courbe $x = 2y + 1$ et à gauche de la courbe $3y^2 = x$.

Considérons maintenant la configuration générale. Supposons qu'on veut intégrer la fonction $f(x, y)$ sur la région

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, L(y) \leq x \leq R(y)\}.$$



Pour intégrer en utilisant des sections horizontales, on suit la procédure de la Section 3.1, mais on prenant des sections horizontales et on inversant partout les rôles de x et y .



En interchangeant les rôles de x et y dans notre analyse à la Section 3.1 on constate alors que, pour intégrer la fonction $f(x, y)$ sur la région D , on calcule l'intégrale double

$$\int_c^d \left(\int_{L(y)}^{R(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

La notation suivante doit être comparée à la Notation 3.1.1.

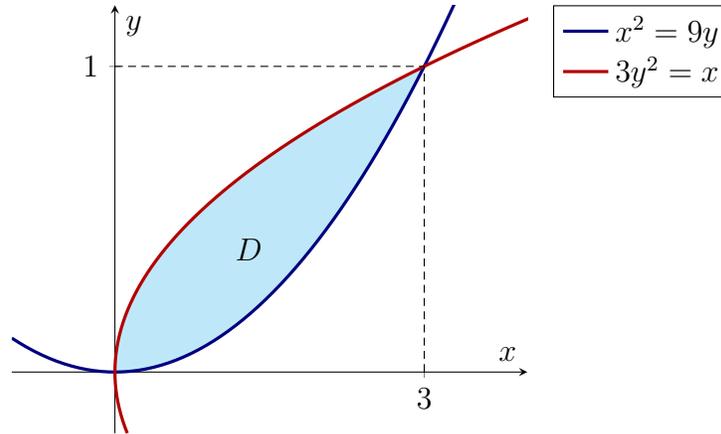
Notation 3.2.1 (Intégrale double).

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_c^d \left(\int_{L(y)}^{R(y)} f(x, y) \, dx \right) dy \\ &= \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_{L(y)}^{R(y)} f(x, y) \, dx . \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. Réévaluons l'intégrale de l'Exemple 3.1.2, mais en utilisant des sections horizontales au lieu de sections verticales. On veut donc calculer

$$\iint_D xy \, dx \, dy ,$$

où D est la région suivante :



Afin d'utiliser la méthode des sections horizontales, on décrit la région comme suit

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 3y^2 \leq x \leq 3\sqrt{y}\}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{3y^2}^{3\sqrt{y}} xy \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=3y^2}^{3\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{9y^2}{2} - \frac{9y^5}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{3y^3}{2} - \frac{3y^6}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Notez qu'on obtient la même réponse que dans l'Exemple 3.1.2. On verra dans le Théorème 3.4.1 pourquoi ce résultat est vrai. \triangle

Exercices.

On reporte les Exercices jusqu'à la Section 3.6.

3.3 Intégrales doubles sur un rectangle

Dans la Section 3.1 et la Section 3.2, on a développé deux méthodes pour calculer une intégrale double sur une région du plan. Dans l'Exemple 3.1.2 et l'Exemple 3.2.2, on a calculé la même intégrale des deux façons et on a obtenu la même réponse. Bien sûr, c'est ce qu'on veut qu'il se produise. Mais on n'a pas encore expliqué pourquoi cela devait être le cas. Dans cette section, on donnera une autre définition de l'intégrale double, puis on présentera certaines conditions qui garantissent que cette définition correspond au calcul par sections verticales et horizontales.

Considérons le rectangle fermé suivant

$$R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2.$$

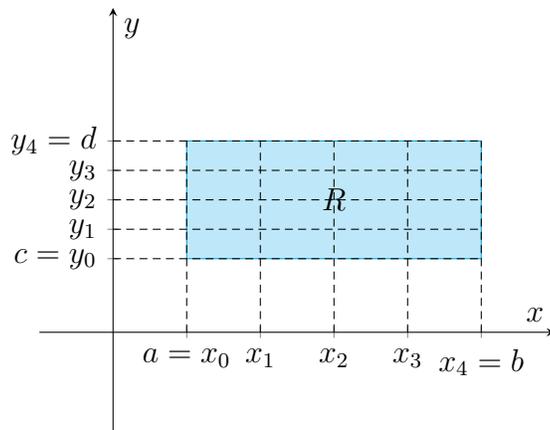
Une *partition régulière* de R d'ordre n est une collection de points $\{x_j\}_{j=0}^n$ et $\{y_j\}_{j=0}^n$ satisfaisant à

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

où

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

pour $0 \leq j, k \leq n-1$. En utilisant ces points équidistants, on subdivise le rectangle R :



Soit

$$R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$$

et soit \mathbf{c}_{jk} un point *arbitraire* dans R_{jk} . On suppose que $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ est borné. Par exemple, puisque R est compact, il découle du Lemme 2.1.9 que f est borné si f est continue. On forme ensuite la somme

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta A, \quad (3.1)$$

où

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{n}, \quad \Delta A = \Delta x \Delta y.$$

Ainsi, ΔA est l'aire de chacun des sous-rectangles en lesquels on a divisé R . La somme (3.1) est appelée une *somme de Riemann* pour f .

On peut maintenant donner la définition précise de l'intégrale double.

Définition 3.3.1 (Intégrale double). Si la suite $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une limite S quand $n \rightarrow \infty$ et si la limite S est la même pour tout choix de points \mathbf{c}_{jk} dans le rectangle R_{jk} , alors on dit que f est *intégrable* sur R et on écrit

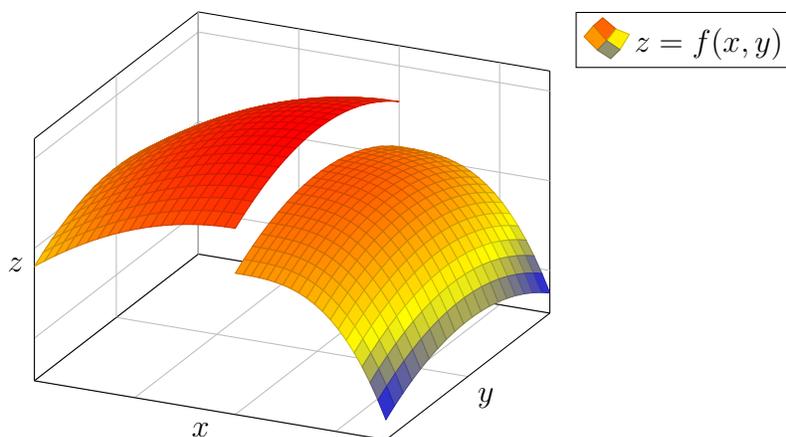
$$\iint_R f(x, y) dA, \quad \iint_R f(x, y) dx dy, \quad \text{or} \quad \iint_R f dx dy.$$

pour la limite S .

Notez que certaines notations dans la Définition 3.3.1 sont les mêmes que dans la Notation 3.1.1 et la Notation 3.2.1. On doit justifier pourquoi on peut utiliser la même notation. Il est également très utile de disposer d'une classe de fonctions qui sont intégrables.

Théorème 3.3.2. *Toute fonction continue définie sur un rectangle fermé est intégrable.*

En fait, un résultat plus général est vrai. Considérez une fonction $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe ressemble à ce qui suit :



Cette fonction est continue partout sauf le long d'une courbe continue (dans le domaine R). Il s'avère que ce type de fonction est aussi intégrable.

Théorème 3.3.3. *Supposons que R soit un rectangle fermé et que $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée. Supposons de plus que l'ensemble des points où f est discontinue se situe sur une réunion finie de graphes de fonctions continues. Alors f est intégrable sur R .*

Proof. On ne démontrera pas ce théorème dans ce cours. L'idée de base de la preuve est la même que pour les fonctions en une variable, où une fonction avec seulement un nombre fini de discontinuités est intégrable. Dans la limite définissant l'intégrale, les termes impliquant les discontinuités s'annulent. \square

Le Théorème 3.3.3 sera essentiel pour traiter les intégrales sur des régions plus générales, ainsi que pour relier la Définition 3.3.1 aux méthodes de sections verticales et horizontales de la Section 3.1 et la Section 3.2. Avant de faire cela, énonçons quelques propriétés des intégrales qui découlent de la Définition 3.3.1 et des propriétés des limites.

Proposition 3.3.4 (Arithmétique des intégrales). *Supposons que f et g soient des fonctions intégrables sur un rectangle R , et que $c \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$ et cf sont intégrables, et on a ce qui suit.*

(a) Linéarité:

$$\iint_R (f(x, y) + g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

(b) Homogénéité:

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

(c) Monotonie: Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in R$, alors

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA.$$

Corollaire 3.3.5. *Si f est intégrable sur un rectangle R , alors $|f|$ l'est aussi, et on a*

$$\left| \iint_R f dA \right| \leq \iint_R |f| dA. \quad (3.2)$$

Proof. Comme

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)| \quad \text{pour tout } (x, y) \in R,$$

nous pouvons utiliser la monotonie et l'homogénéité de l'intégrale (avec $c = -1$) pour conclure que

$$-\iint_R |f| dA \leq \iint_R f dA \leq \iint_R |f| dA,$$

ce qui est équivalent à (3.2). □

Exercices.

On reporte les Exercices jusqu'à la Section 3.6.

3.4 Le théorème de Fubini

Le théorème suivant affirme que, pour les fonctions continues, on peut calculer l'intégrale sur un rectangle par la méthode des sections verticales de la Section 3.1 ou la méthode des sections horizontales de la Section 3.2. En particulier, les méthodes des sections verticales et horizontales donnent la même réponse, ce qui explique le résultat obtenu dans l'Exemple 3.1.2 et l'Exemple 3.2.2.

Théorème 3.4.1 (Théorème de Fubini, cas continu). *Supposons que $R = [a, b] \times [c, d]$ et que $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Alors*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Proof. Pour une démonstration de ce théorème, voir [MT11, Th. 5.2.3]. □

Exemple 3.4.2. Soient $R = [0, 3] \times [e, 2e]$ et

$$f: R \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Grâce au théorème de Fubini (Théorème 3.4.1), on a

$$\begin{aligned} \iint_R f dA &= \int_e^{2e} \int_0^3 f(x, y) dx dy \\ &= \int_e^{2e} \int_0^3 \frac{x}{y} dx dy \\ &= \int_e^{2e} \left[\frac{x^2}{2y} \right]_{x=0}^3 dy \\ &= \int_e^{2e} \frac{9}{2y} dy \\ &= \int_e^{2e} \frac{9}{2y} dy \\ &= \left[\frac{9}{2} \ln y \right]_{y=e}^{2e} \\ &= \frac{9}{2} (\ln(2e) - \ln e) \\ &= \frac{9}{2} (\ln 2 + \ln e - \ln e) \\ &= \frac{9}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Alternativement, on peut d'abord intégrer par rapport à y , ce qui donne

$$\iint_R f dA = \int_0^3 \int_e^{2e} \frac{x}{y} dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 [x \ln y]_{y=e}^{2e} dx \\
&= \int_0^3 x \ln 2 dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln 2 \right]_{x=0}^3 \\
&= \frac{9}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Comme attendu, on obtient la même réponse. \triangle

Comme on a vu dans le Théorème 3.3.3, une fonction qui est discontinue seulement sur une réunion finie de graphes de fonctions continues est toujours intégrable. Le théorème suivant généralise le Théorème 3.4.1 à ce cadre.

Théorème 3.4.3 (Théorème de Fubini, version générale). *Supposons que $R = [a, b] \times [c, d]$ et que $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée dont les points de discontinuités se trouvent sur une réunion finie de graphes de fonctions continues.*

(a) *Si l'intégrale $\int_c^d f(x, y) dy$ existe pour tout $x \in [a, b]$, alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

existe et on a

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_R f(x, y) dA.$$

(b) *Si l'intégrale $\int_a^b f(x, y) dx$ existe pour tout $y \in [c, d]$, alors*

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

Par conséquent, si toutes les conditions ci-dessus sont réunies, on a

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

On donne maintenant un exemple de « fonction problématique ».

Exemple 3.4.4. Soient $R = [0, 1] \times [0, 1]$ et

$$f: R \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \text{ sont des nombres rationnels,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors l'intégrale $\iint_R f dA$ n'existe pas. En effet, si on choisit les points \mathbf{c}_{jk} de la Définition 3.3.1 ayant des coordonnées rationnelles, les sommes de Riemann sont toutes égales à 1, tandis que si on les choisit ayant des coordonnées irrationnelles, les sommes de Riemann sont toutes égales à 0. \triangle

Remarque 3.4.5. Si vous suivez des cours d'analyse plus avancés, vous découvrirez l'[intégrale de Lebesgue](#) qui *existe* pour la fonction f de l'Exemple 3.4.4 et est égale à 0, essentiellement parce qu'il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.

Exercices.

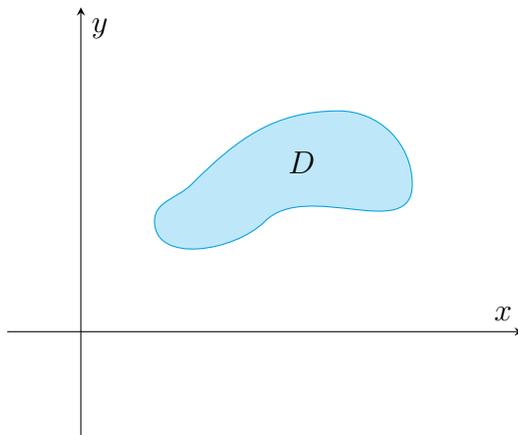
Exercices tirés de [FRYb, §3.1]: Q1, Q2, Q3a

Davantage d'exercices sont reportés à la Section 3.6.

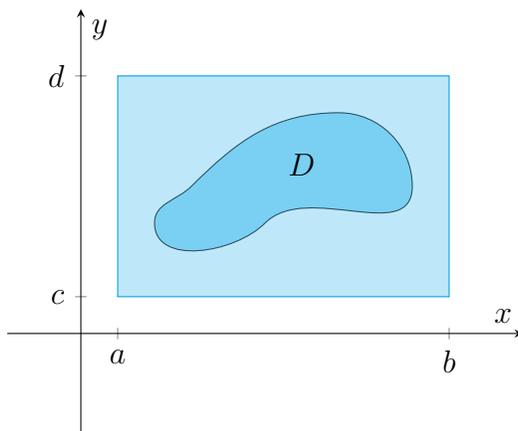
3.5 Intégrales doubles sur des régions plus générales

Le théorème de Fubini (Théorème 3.4.3) indique que l'intégrale sur un rectangle (au sens de la Définition 3.3.1) est égale aux intégrales itérées correspondantes aux méthodes des sections verticales et horizontales. Cependant, cela n'est énoncé que pour les régions rectangulaires. On aimerait toutefois pouvoir travailler avec des régions plus générales du plan. Heureusement, il existe un simple « astuce » qui permet de le faire.

Supposez que D soit une région bornée de \mathbb{R}^2 , et que l'on veuille intégrer une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sur D .



Puisque D est borné, on peut l'inclure dans un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$.



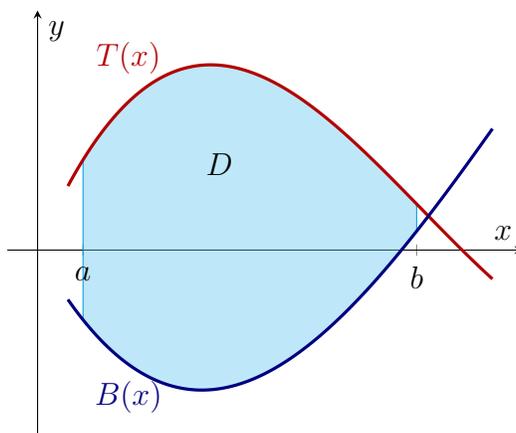
Notre « astuce » consiste à étendre la fonction f à \mathbb{R} en la définissant comme nulle en dehors de D . Soyons plus précis.

On dira qu'un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est *y-simple* s'il existe deux fonctions continues

$$B, T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, B(x) \leq y \leq T(x)\}.$$



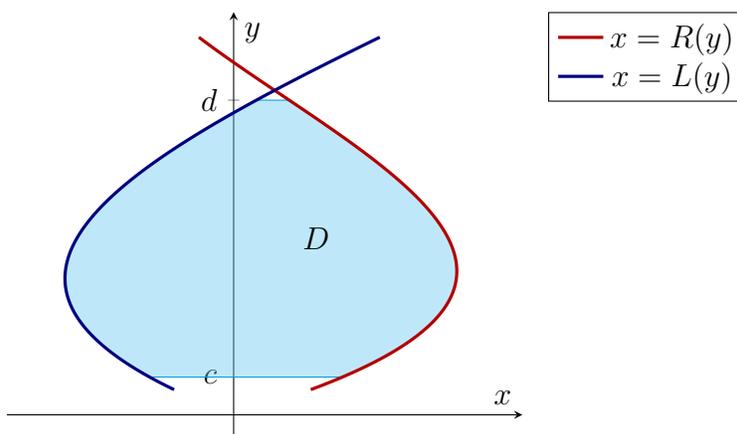
On a considéré ce type de régions dans la Section 3.1.

On dira qu'un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est *x-simple* s'il existe deux fonctions continues

$$L, R: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, L(y) \leq x \leq R(y)\}.$$



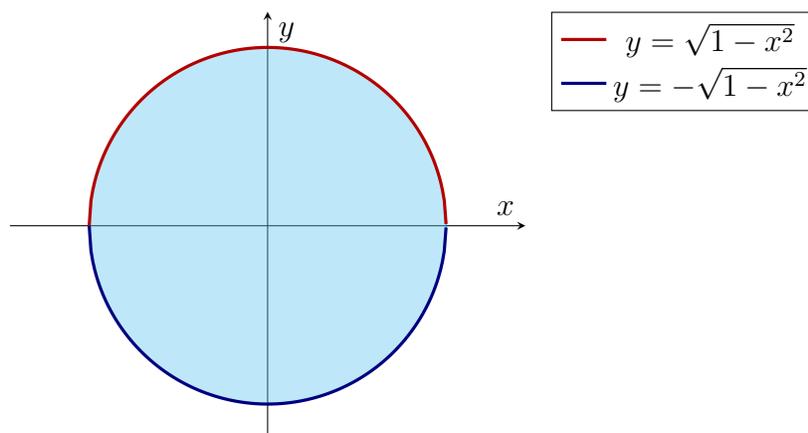
Ce type de régions est celui qu'on a considéré dans la Section 3.2.

On dit qu'un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est *simple* s'il est à la fois *x-simple* et *y-simple*. Par exemple, le disque unitaire

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

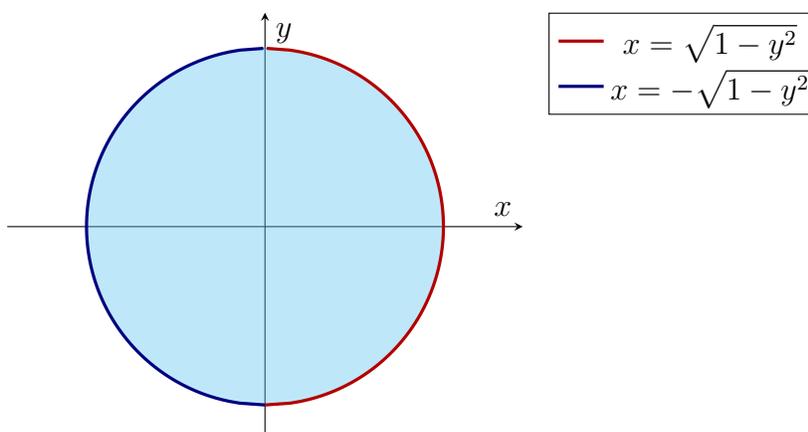
est simple car

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$



et

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$



Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est dit une *région élémentaire* s'il est soit x -simple soit y -simple (ou les deux).

On peut maintenant donner la définition précise de l'intégrale sur une région générale du plan.

Définition 3.5.1 (Intégrale double sur une région élémentaire). Supposons que D est une région élémentaire du plan et que R est un rectangle contenant D . Supposons également que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On définit

$$f^*: R \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{Si } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Alors f^* est intégrable sur R selon lecrefhacksaw. On définit l'*intégrale de f sur D* comme étant

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R f^*(x, y) dA.$$

La Définition 3.5.1 est lié aux méthodes de sections verticales et horizontales de la Section 3.1 et la Section 3.2 grâce au résultat suivant.

Théorème 3.5.2 (Réduction aux intégrales itérées). *Supposons que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.*

(a) Si

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, B(x) \leq y \leq T(x)\}$$

est une région y -simple, alors

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{B(x)}^{T(x)} f(x, y) dy dx.$$

(b) Si

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, L(y) \leq x \leq R(y)\}$$

est une région x -simple, alors

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{L(y)}^{R(y)} f(x, y) dx dy.$$

On peut maintenant ajouter une autre propriété importante des intégrales à celles énumérées dans la Proposition 3.3.4. On rappelle que deux ensembles X et Y sont *disjoints* si $X \cap Y = \emptyset$.

Proposition 3.5.3 (Additivité de l'intégrale). *Si $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ sont des régions élémentaires disjointes et $f: D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors*

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA.$$

Exercices.

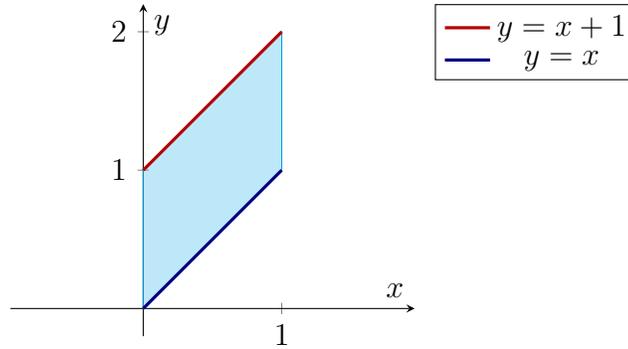
Exercices tirés de [FRYb, §3.1]: Q3

Davantage d'exercices sont reportés à la Section 3.6.

3.6 Exemples et applications des intégrales doubles

Exemple 3.6.1. Soient

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x + 1\}$$



et

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2y - (x + 1)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \iint_D f \, dA &= \int_0^1 \int_x^{x+1} (2y - (x + 1)^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 [y^2 - (x + 1)^2 y]_{y=x}^{x+1} \, dx \\ &= \int_0^1 ((x + 1)^2 - (x + 1)^3 - x^2 + x(x + 1)^2) \, dx \\ &= \int_0^1 ((x + 1)^2(1 - x - 1 + x) - x^2) \, dx \\ &= - \int_0^1 x^2 \, dx \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

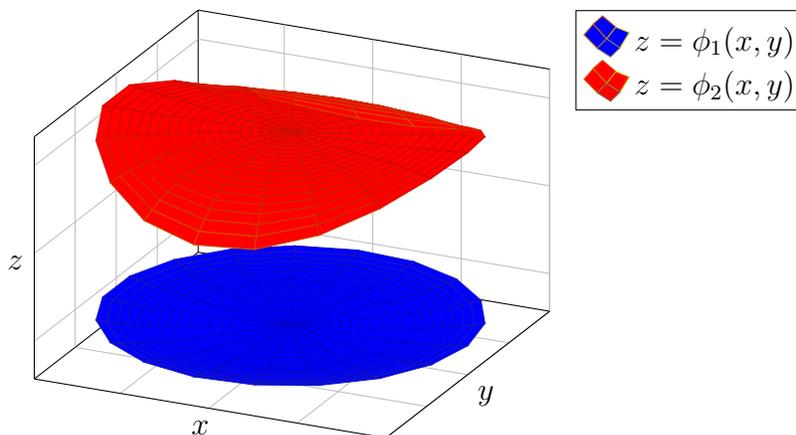
Notez que D est également une région de x -simple. On pourrait donc calculer l'intégrale en intégrant d'abord par rapport à x . Mais cela impliquerait de diviser la région en deux parties. \triangle

Une utilisation importante dans le calcul des volumes est l'intégrale double. Vous avez appris en calcul différentiel en une variable comment calculer le volume de certains types de solides (par exemple, les solides de révolution). En utilisant l'intégrale double, on peut calculer des volumes plus généraux. En particulier, supposons que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est une région élémentaire, et supposons qu'on a deux fonctions

$$\phi_1, \phi_2: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_1(x, y) \leq \phi_2(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in D.$$

Considérez le solide

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

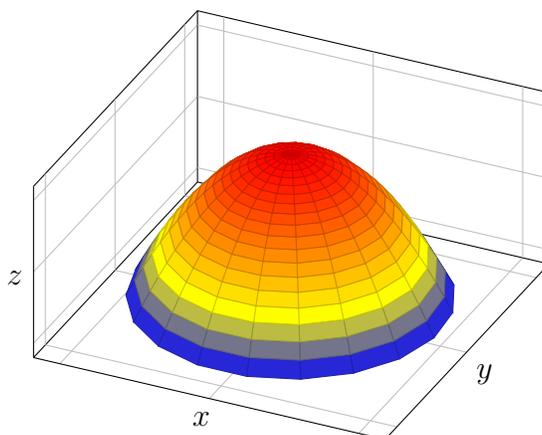


où on a tracé les graphes des fonctions ϕ_1, ϕ_2 qui définissent le haut et le bas du solide. Le volume de S est donné par

$$\text{Vol } S := \iint_D (\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)) \, dA. \quad (3.3)$$

Exemple 3.6.2. Calculons le volume du solide

$$S = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$



On note d'abord que

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\},$$

où

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

est le disque unitaire. Comme la région D est simple, on peut la décrire comme une région x -simple ou comme une région y -simple. Décrivons-la comme une région x -simple:

$$D = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \text{Vol } S &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left[(1 - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \left((1 - y^2)\sqrt{1 - y^2} - \frac{1}{3}(1 - y^2)^{3/2} \right) dy \\
 &= \frac{4}{3} \int_{-1}^1 (1 - y^2)^{3/2} dy.
 \end{aligned}$$

On effectue ensuite la substitution

$$y = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

et donc

$$dy = \cos(t) dt \quad \text{and} \quad \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \cos t.$$

Ainsi

$$\text{Vol } S = \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(t) dt.$$

Rappelez-vous l'identité du double angle

$$\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1 \implies \cos^2(t) = \frac{\cos(2t) + 1}{2}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
 \cos^4(t) &= \left(\frac{\cos(2t) + 1}{2} \right)^2 = \frac{\cos^2(2t) + 2 \cos(2t) + 1}{4} \\
 &= \frac{\cos(4t) + 1}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \text{Vol } S &= \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8} \right) dt \\
 &= \frac{4}{3} \left[\frac{\sin(4t)}{4 \cdot 8} + \frac{\sin(2t)}{2 \cdot 2} + \frac{3t}{8} \right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

△

Il est parfois utile de changer l'ordre d'intégration d'une intégrale itérée. Dans certains cas, un tel changement rend l'intégrale beaucoup plus facile à calculer.

Exemple 3.6.3 ([MT11, Exemple 5.4.2]). Évaluons l'intégrale

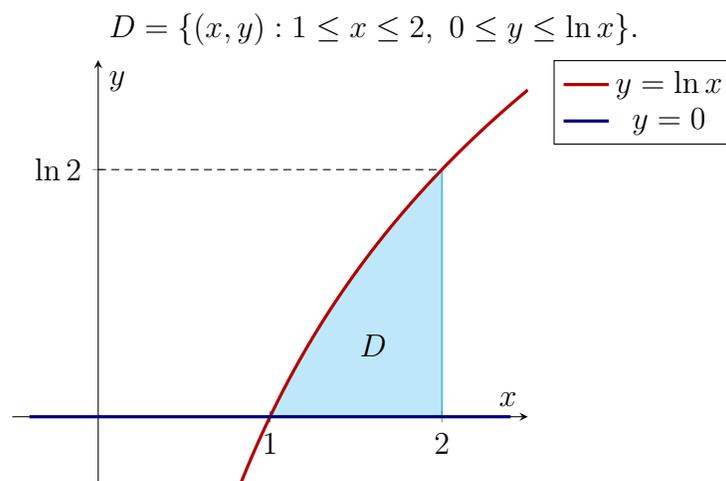
$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx. \quad (3.4)$$

Cette intégrale itérée est assez difficile à calculer telle quelle. Cependant, elle deviendra plus facile une fois que nous aurons changé l'ordre d'intégration.

On remarque d'abord que l'intégrale ci-dessus est égale à

$$\iint_D (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dA,$$

où



La région D est simple, et est également donnée par

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \ln 2, e^y \leq x \leq 2\}.$$

Ainsi, l'intégrale (3.4) est égale à

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dx dy &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(\int_{e^y}^2 (x-1) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{e^y}^2 dy \\ &= - \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right) \sqrt{1+e^{2y}} dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{2y} \sqrt{1+e^{2y}} dy + \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}} dy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dans la première intégrale dans (3.5), on substitue

$$u = e^{2y}, \quad du = 2e^{2y} dy,$$

et dans la deuxième intégrale on substitue

$$v = e^y, \quad dv = e^y dy.$$

On obtient de ceci

$$-\frac{1}{4} \int_1^4 \sqrt{1+u} du + \int_1^2 \sqrt{1+v^2} dv.$$

Ces deux intégrales peuvent être calculées en utilisant les méthodes du calcul à une variable. (Par exemple, les primitives sont incluses dans les listes standards.) Pour la première intégrale, on a

$$\int_1^4 \sqrt{1+u} du = \left[\frac{2}{3}(1+u)^{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (5^{3/2} - 2^{3/2}).$$

La deuxième intégrale est

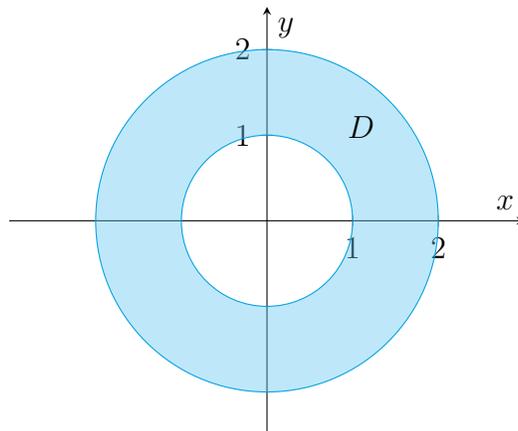
$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1+v^2} dv &= \frac{1}{2} \left[v\sqrt{1+v^2} + \ln(\sqrt{1+v^2} + v) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2) \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right). \end{aligned}$$

En conclusion, l'intégrale (3.4) est égale à

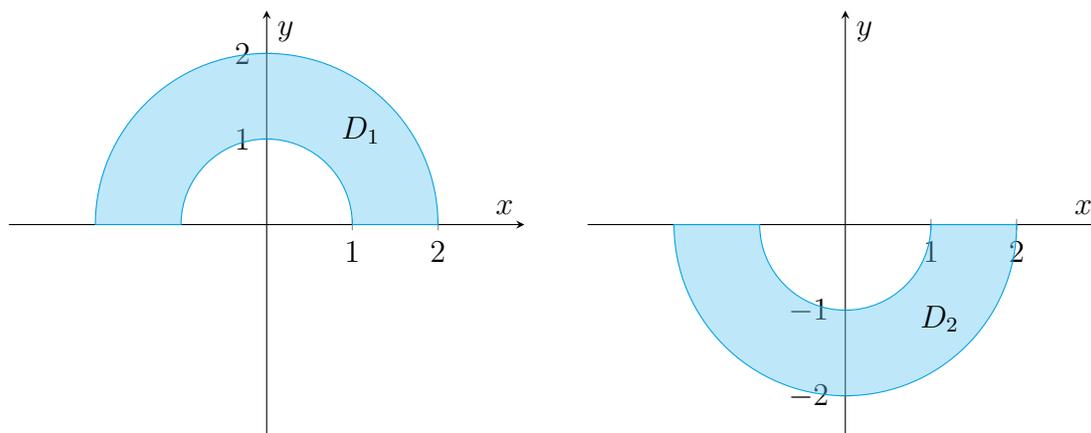
$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (5^{3/2} - 2^{3/2}) + \frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2) \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right) \\ = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{2} + 1} \right) - \frac{1}{6} (5^{3/2} - 2^{3/2}). \quad \triangle \end{aligned}$$

Exemple 3.6.4. Comment pourrions-nous calculer une intégrale sur la région

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}?$$



La région D n'est ni x -simple ni y -simple. Cependant, on peut utiliser l'additivité de l'intégrale (Proposition 3.5.3) et diviser D en deux régions y -simples:



Alternativement, on peut diviser D en deux régions x -simples. △

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §3.1]: Q4–Q29.

3.7 Intégrales triples

Après avoir abordé les intégrales doubles de manière assez approfondie, intéressons nous maintenant aux intégrales en dimension supérieure. La théorie est analogue à celle du cas à deux variables et nous serons donc assez brefs ici. Bien que l'on puisse définir des intégrales multiples pour toute dimension finie, nous limitons notre attention aux intégrales triples.

Notre objectif est de définir l'intégrale triple d'une fonction sur une boîte rectangulaire (plus précisément, un parallélépipède rectangulaire)

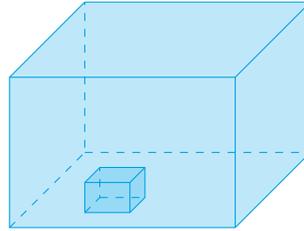
$$B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q].$$

Comme pour les intégrales doubles, on divise les trois côtés de la boîte en parties égales en subdivisant les intervalles

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, & \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x := \frac{b-a}{n}, \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d, & \quad y_{j+1} - y_j = \Delta y := \frac{d-c}{n}, \\ p = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = q, & \quad z_{k+1} - z_k = \Delta z := \frac{q-p}{n}. \end{aligned}$$

De cette façon, on partitionne la boîte B en sous-boîtes

$$B_{ijk} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}], \quad 0 \leq i, j, k \leq n-1.$$



Puis on forme la somme

$$S_n = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V,$$

où \mathbf{c}_{ijk} est un point quelconque de B_{ijk} et

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

est le volume de chaque sous-boîte B_{ijk} .

Définition 3.7.1 (Intégrale triple). Supposez que $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \subseteq \mathbb{R}^3$ et que f est une fonction bornée $f: B \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ existe et est indépendante du choix des points \mathbf{c}_{ijk} , alors on dit que f est *intégrable* et on appelle S l'*intégrale triple* (ou simplement la *intégrale*) de f sur B . On la dénote par

$$\iiint_B f dV, \quad \iiint_B f(x, y, z) dV, \quad \text{ou} \quad \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz.$$

L'intégrale triple satisfait les propriétés de linéarité, d'homogénéité, de monotonie et d'additivité. (Voir la Proposition 3.3.4 et la Proposition 3.5.3.) Comme pour l'intégrale double, on calcule l'intégrale triple en pratique en la réduisant à une intégrale itérée.

Théorème 3.7.2. Supposez que $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \subseteq \mathbb{R}^3$ et que $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable. Alors toute intégrale itérée qui existe est égale à l'intégrale triple. Par exemple,

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dV &= \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z) dz dy dx. \end{aligned}$$

(Il y a six possibilités d'intégrales itérées).

Exemple 3.7.3. Évaluons

$$\iiint_B (2x + y^2 - z) dV \quad \text{où} \quad B = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 3].$$

En utilisant le Théorème 3.7.2, on a

$$\begin{aligned}
 \iiint_B (2x + y^2 - z) \, dV &= \int_0^3 \int_0^1 \int_{-1}^1 (2x + y^2 - z) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_0^3 \int_0^1 [x^2 + (y^2 - z)x]_{x=-1}^1 \, dy \, dz \\
 &= 2 \int_0^3 \int_0^1 (y^2 - z) \, dy \, dz \\
 &= 2 \int_0^3 \left[\frac{y^3}{3} - zy \right]_{y=0}^1 \, dz \\
 &= 2 \int_0^3 \left(\frac{1}{3} - z \right) \, dz \\
 &= 2 \left[\frac{z}{3} - \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^3 = 2 \left(1 - \frac{9}{2} \right) = -7. \quad \triangle
 \end{aligned}$$

Comme pour les intégrales doubles, on souhaite souvent intégrer sur des régions plus générales W , pas seulement des boîtes. Comme dans la Section 3.5, il suffit d'inclure la région dans une boîte et d'étendre notre fonction avec la valeur zéro à l'extérieur de W .

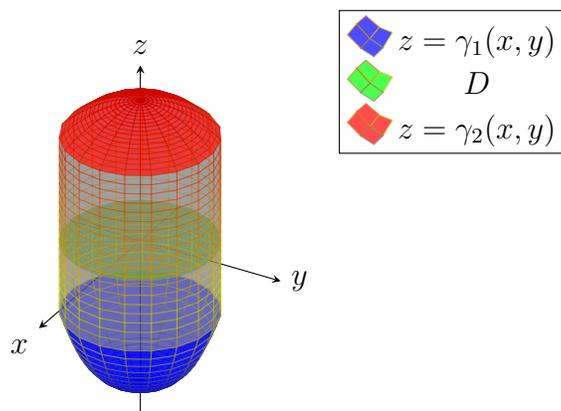
Une *région élémentaire* dans \mathbb{R}^3 est une région définie en restreignant l'une des variables entre deux fonctions des deux variables restantes, et où le domaine de ces deux fonctions est une région élémentaire du plan. Par exemple, si $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est une région élémentaire et que

$$\gamma_1, \gamma_2: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_1(x, y) \leq \gamma_2(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in D,$$

alors

$$W = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$$

est une région élémentaire de \mathbb{R}^3 .



Exemple 3.7.4. Décrivons la boule unitaire

$$W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

comme une région élémentaire.

Notez d'abord qu'on peut écrire

$$W = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\},$$

où

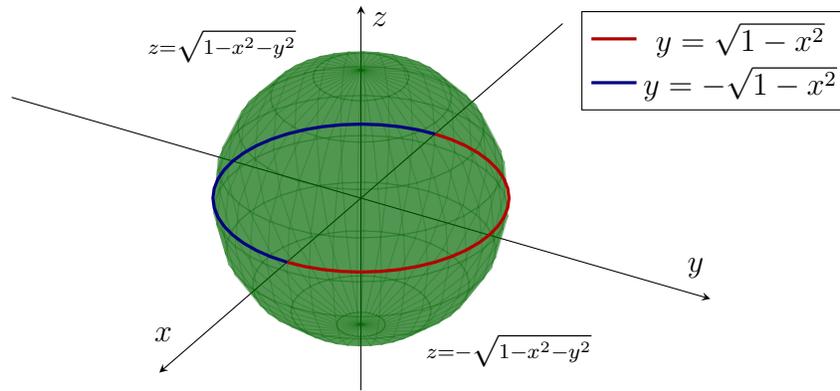
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

est le disque unitaire. On peut alors décrire D comme une région x -simple ou y -simple. En tant que région y -simple, elle se présente comme suit

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

On a donc décrit D par les inégalités

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$



△

Théorème 3.7.5 (Intégrales triple itérées). *Supposons que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est une région élémentaire*

$$\gamma_1, \gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_1(x, y) \leq \gamma_2(x, y) \text{ for all } (x, y) \in D,$$

et que

$$W = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}.$$

Alors on a

$$\iiint_W f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

si

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

est une région y -simple, et on a

$$\iiint_W f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

si

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

est une région x -simple, à condition que toutes ces intégrales existent.

Il existe des résultats analogues au Théorème 3.7.5 pour d'autres ordres de variables.

Exemple 3.7.6. Dans le cadre du Théorème 3.7.5, on suppose que $f(x, y, z) = 1$ pour tout $(x, y, z) \in W$. Alors

$$\iiint_W dV = \iint_D (\gamma_2(x, y) - \gamma_1(x, y)) dA$$

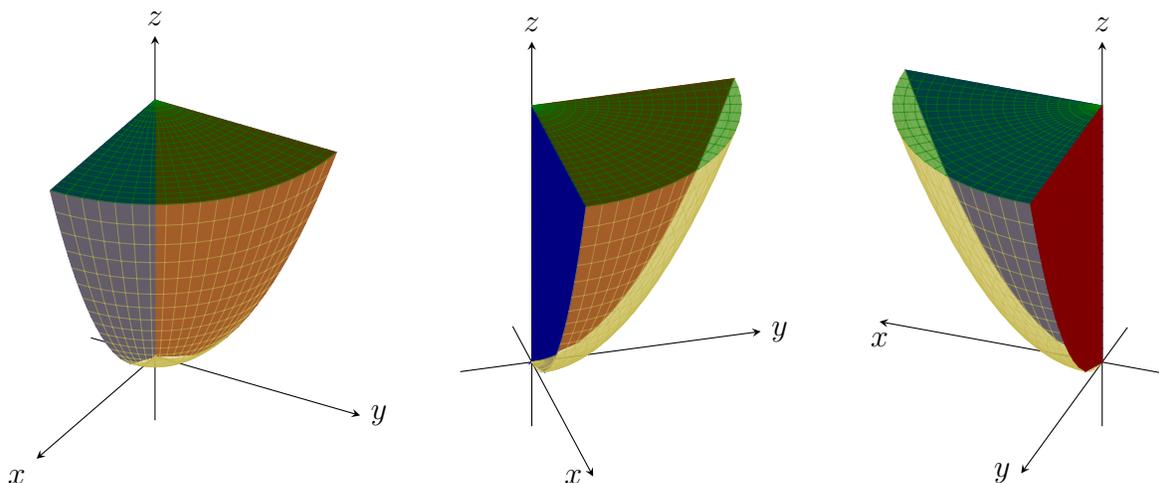
est le volume de W . (Comparez avec (3.3).)

△

Souvent, la partie la plus difficile dans le calcul d'une intégrale triple est de trouver les bornes d'intégration.

Exemple 3.7.7 (cf. [MT11, Exemple 5.5.5]). Soit W la région située dans l'octant $x \geq 0$, $y \geq 0$ et bornée par les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 2$, et la surface $z = x^2 + y^2$. Calculons l'intégrale $\iiint_W y \, dx \, dy \, dz$.

On dessinera la région W de trois points de vue différents :



On peut décrire cette région comme

$$W = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \iiint_W y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 y \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} [yz]_{z=x^2+y^2}^2 \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} y(2-x^2-y^2) dy dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left[y^2 - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(2-x^2 - \frac{1}{2}x^2(2-x^2) - \frac{1}{4}(2-x^2)^2 \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} + x \right]_{x=0}^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}. \quad \triangle
\end{aligned}$$

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §3.5]: Q1–Q22.

Chapitre 4

Le changement de variables

Dans ce chapitre, on abordera le changement de variables dans les intégrales doubles et triples. Il s'agit d'une technique très utile et il est parfois possible de simplifier considérablement une intégrale avec un changement d'une ou plusieurs variables plus appropriées.

4.1 Cas de deux variables

Rappelez-vous la formule de changement de variable, également appelée *substitution*, pour les intégrales en une variable :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u) du, \quad (4.1)$$

où $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ est une fonction injective de classe C^1 . On écrit souvent

$$x = \varphi(u), \quad dx = \varphi'(u) du,$$

pour se souvenir du facteur supplémentaire de φ' qu'il nous faut inclure. On a effectué ces types de changement de variables dans l'Exemple 3.6.3. Parfois, on utilise la formule de changement de variables dans le sens opposé :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

Par exemple, pour calculer $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2) dx$, on peut effectuer la substitution suivante

$$u = \varphi(x) = x^2, \quad du = 2x dx,$$

de sorte que

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos u du = \frac{1}{2} [\sin u]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Dans une intégrale itérée $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$, on pourrait effectuer un tel changement de variables pour x et y indépendamment. Cependant, on veut souvent changer x et y *simultanément*, de sorte que les nouvelles variables u et v soient des fonctions de *deux* variables x

et y :

$$(u, v) = T(x, y).$$

Puisque notre définition de l'intégrale double (Définition 3.3.1) consiste à diviser une région en rectangles, la clé pour développer la formule de changement de variables en deux dimensions est de voir comment le changement de variables affecte l'aire d'un rectangle. En fait, il suffit de voir comment il affecte l'aire du carré unitaire.

On rappelle que toute application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ correspond à une multiplication à gauche par une matrice 2×2 . On considère la matrice

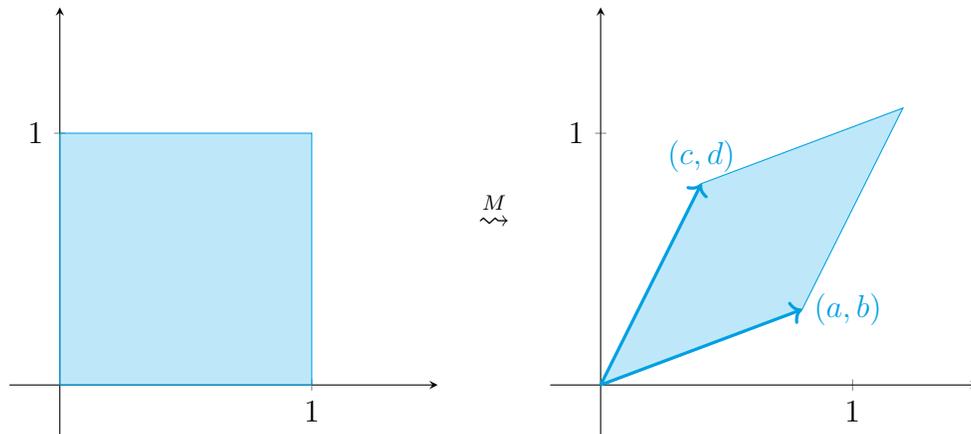
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Cela envoie le carré unitaire $[0, 1] \times [0, 1]$, qui a pour sommets les points

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 1),$$

au parallélogramme avec les sommets

$$(0, 0), \quad (a, c), \quad (b, d), \quad (a + b, c + d).$$



L'aire de ce parallélogramme est la valeur absolue de

$$ad - bc = \det M,$$

le déterminant de M .

En général, notre changement de variables peut ne pas être donné par une application linéaire. Cependant, on peut l'approcher par une application linéaire. Supposons que le changement de variables est donné par

$$(x, y) = T(u, v), \quad \text{où } T: D^* \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ est } C^1.$$

On a vu dans la Section 1.5 que la meilleure approximation linéaire de la fonction T est donnée par sa *matrice jacobienne*.

$$DT = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est appelé le *déterminant jacobien* ou simplement le *jacobien* de T . Il est noté

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Dans la limite définissant l'intégrale à deux variables, cette approximation devient de plus en plus précise. Ainsi, lors d'un changement de variables en deux dimensions, il faut ajuster par un facteur égal à la valeur absolue du jacobien afin de corriger le changement d'aire induit par le changement de variables. Rappelons qu'une fonction est *bijjective* si elle est à la fois injective et surjective.

Théorème 4.1.1 (Changement de variables pour les intégrales doubles). *Supposons que D et D^* sont des régions élémentaires du plan, et que*

$$T: D^* \rightarrow D, \quad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)),$$

est bijective et de classe C^1 . Alors, pour toute fonction intégrable $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

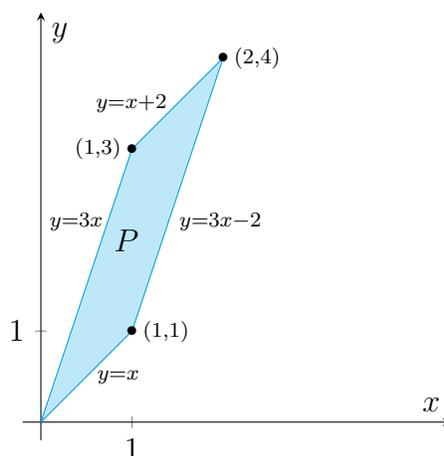
où $(x, y) = T(u, v)$.

On peut retenir la formule dans Théorème 4.1.1 grâce à

$$dA = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (4.2)$$

Exemple 4.1.2. Soit P le parallélogramme borné par les droites

$$y = 3x, \quad y = x, \quad y = x + 2, \quad y = 3x - 2.$$



Supposons qu'on cherche à calculer l'intégrale

$$\iint_P xy dx dy.$$

Puisque P est une région élémentaire, on peut la calculer comme une intégrale itérée. Cependant, cela nécessiterait de diviser la région P en plusieurs morceaux. En revanche, on peut effectuer un changement de variables de manière à ce que la région devienne beaucoup plus facile à manipuler.

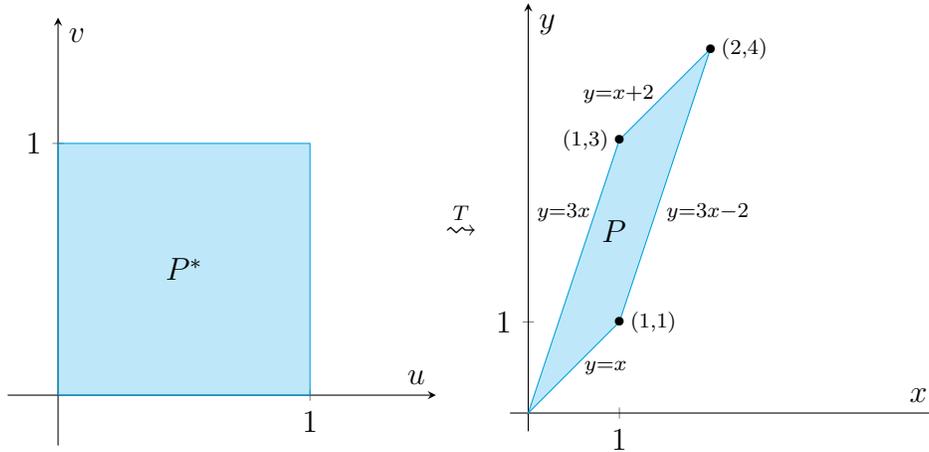
Effectuons le changement de variables suivant

$$x = u + v, \quad y = 3u + v, \quad \text{so that } T(u, v) = (u + v, 3u + v).$$

T est l'application linéaire définie par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque le déterminant de cette matrice est -2 , qui est non nul, elle est injective (comme on l'a appris en algèbre linéaire). On peut donc utiliser le Théorème 4.1.1. On choisit T de manière à ce qu'elle envoie le carré unitaire P^* à P :



De plus, on a

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right| = |-2| = 2.$$

Ainsi, on a

$$dA = dx dy = 2 du dv.$$

Donc, par la formule du changement de variables (Théorème 4.1.1), on a

$$\begin{aligned} \iint_P xy \, dx \, dy &= \iint_{P^*} (u + v)(3u + v) 2 \, du \, dv = 2 \int_0^1 \int_0^1 (3u^2 + 4uv + v^2) \, du \, dv \\ &= 2 \int_0^1 [u^3 + 2u^2v + uv^2]_{u=0}^1 \, dv = 2 \int_0^1 (1 + 2v + v^2) \, dv = 2 \left[v + v^2 + \frac{v^3}{3} \right]_{v=0}^1 = \frac{14}{3}. \quad \triangle \end{aligned}$$

Exercices.

4.1.1. L'analogie à une variable du Théorème 4.1.1 rétablit (4.1) dans le sens suivant. Supposons $a < b$, $c < d$ et posons

$$I = [a, b], \quad J = [c, d]$$

De plus, supposons que $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ est une fonction bijective de classe C^1 . Montrez que la formule

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du$$

rétablit la formule de changement d'une seule variable (4.1). Le point subtil ici est la présence de la valeur absolue ci-dessus. *Indication* : Les hypothèses sur φ impliquent qu'elle est monotone.

4.1.2 ([MT11, §6.2, Exercices 1, 2]). Pour chacune des intégrales suivantes, proposez un changement de variables qui simplifiera l'intégrale. Trouvez ensuite le jacobien correspondant.

(a) $\iint_R (3x + 2y) \sin(x - y) dA$

(b) $\iint_R e^{-4x+7y} \cos(7x - 2y) dA$

(c) $\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 dA$

(d) $\iint_R (x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y)) dA$

4.1.3 ([MT11, §6.2, Exercice 4]). Soit D la région donnée par $0 \leq y \leq x$ et $0 \leq x \leq 1$. Évaluez

$$\iint_D (x + y) dx dy$$

en effectuant le changement de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Vérifiez votre réponse en évaluant l'intégrale directement (c'est-à-dire sans changement de variables) à l'aide d'une intégrale itérée.

4.1.4 ([MT11, §6.2, Exercice 8]). On définit $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Soit

$$D^* = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}.$$

Trouvez $D = T(D^*)$ et évaluez $\iint_D dx dy$.

4.1.5 ([MT11, §6.2, Exercice 10]). Évaluez

$$\iint_R \frac{1}{x + y} dy dx,$$

où R est la région bornée par $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ et $x + y = 4$, en utilisant l'application $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

4.1.6 ([MT11, §6.2, Exercice 14]). (a) Exprimez $\int_0^1 \int_0^{x^2} xy \, dy \, dx$ comme une intégrale sur le triangle

$$D^* = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\}.$$

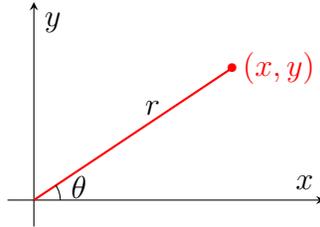
Indication : Trouvez une application injective T de D^* à la région d'intégration donnée.

(b) Évaluez cette intégrale directement et comme une intégrale sur D^* .

4.2 Les coordonnées polaires

Comme un cas particulier du changement de variables de la Section 4.1, voici une méthode pour calculer les intégrales en coordonnées polaires. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYc, §3.2].

Définition 4.2.1 (Coordonnées polaires). Les *coordonnées polaires* du point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont le couple ordonné (r, θ) , où r est la distance entre $(0, 0)$ et (x, y) et θ est l'angle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre entre l'axe des x et la droite reliant (x, y) à $(0, 0)$.



On a alors

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

On peut appliquer la théorie générale de la Section 4.1. En prenant

$$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad (4.3)$$

on a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det DT = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Notez que T n'est pas injective, puisqu'elle associe $(0, 0)$ à tous les $(0, \theta)$. Cependant, le théorème de changement de variables est toujours valide. En effet, l'ensemble des points où T n'est pas injective se trouve sur le graphe d'une courbe lisse (en particulier, il s'agit d'une région unidimensionnelle d'aire nulle) et peut donc être négligé dans le cadre de l'intégration.

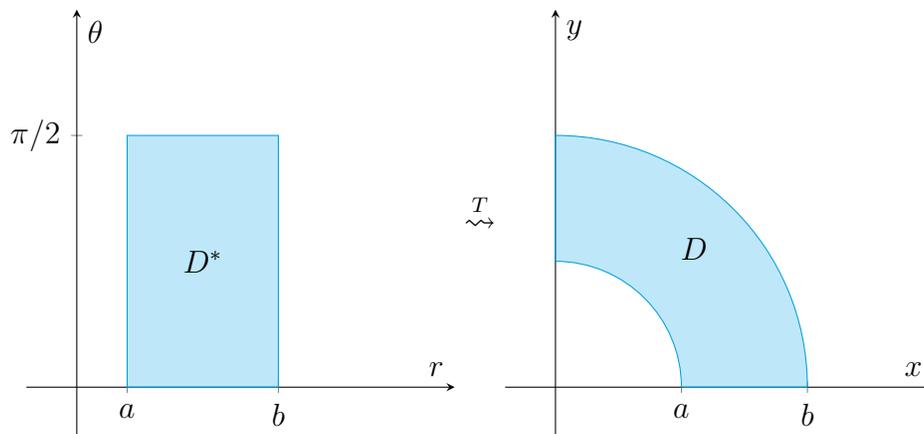
Théorème 4.2.2 (Intégrale double en coordonnées polaires). *Supposons que D est une région élémentaire et que l'application T dans (4.3) définit une bijection de D^* à D , sauf éventuellement pour les points sur la frontière de D^* . Alors*

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Exemple 4.2.3. Évaluons

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy,$$

où D est la région dans le premier quadrant comprise entre les arcs des cercles $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + y^2 = b^2$, où $0 < a < b$.



En coordonnées polaires, la région D correspond à

$$D^* = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} = [a, b] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

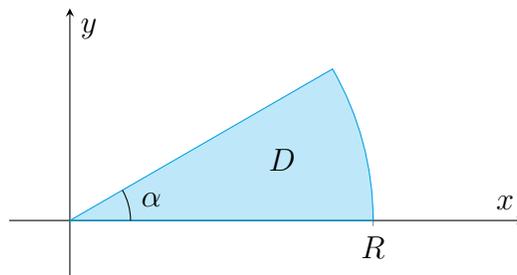
Par conséquent, selon le Théorème 4.2.2, on a

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_a^b \int_0^{\pi/2} r \ln(r^2) \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b r \ln(r^2) \, dr = \pi \int_a^b r \ln r \, dr.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\pi \left[\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right]_{r=a}^b = \frac{\pi}{4} (2b^2 \ln b - 2a^2 \ln a + a^2 - b^2). \quad \triangle$$

Exemple 4.2.4. Calculons l'aire de la zone d'un secteur d'un cercle de rayon R et d'angle α .



En coordonnées polaires, la région est donnée par

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha.$$

Ainsi, on a

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dA = \int_0^R \int_0^\alpha r \, d\theta \, dr = \alpha \int_0^R r \, dr = \alpha \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^R = \frac{1}{2} \alpha R^2.$$

En particulier, l'aire du cercle de rayon R (donc $\alpha = 2\pi$) est πR^2 . △

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §3.2]: Q1–Q24.

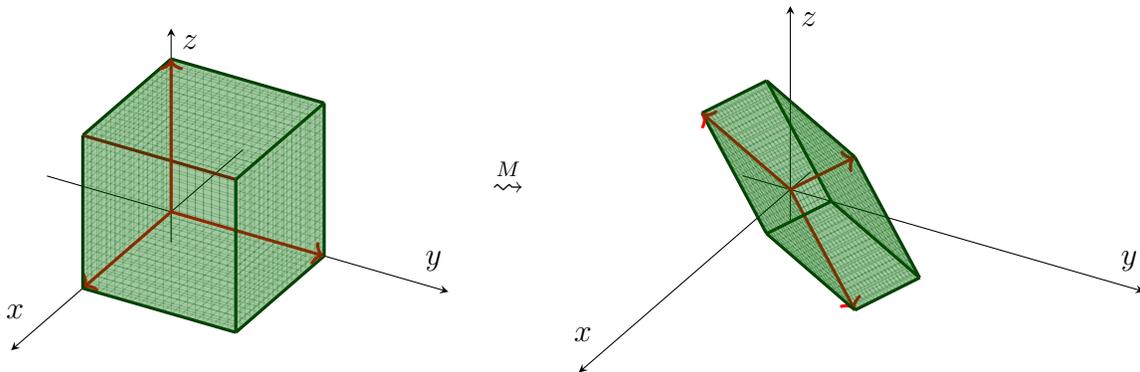
4.3 Trois variables

On peut généraliser la théorie de la Section 4.1 à des dimensions arbitraires. La théorie de deux dimensions a été abordée dans la Section 4.1 et celle d'une dimension dans les cours précédents (voir également l'Exercice 4.1.1). Traitons maintenant le cas de trois dimensions.

La situation pour trois dimensions est très similaire au cas bidimensionnel traité dans la Section 4.1. La clé est que l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par la multiplication à gauche par la matrice $M \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ envoie le cube unitaire $[0, 1]^3$ au parallélépipède engendré par les vecteurs $M\mathbf{e}_1, M\mathbf{e}_2, M\mathbf{e}_3$, où

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 .



Ce parallélépipède a un volume $|\det M|$.

Supposez maintenant qu'on introduit de nouvelles variables u, v, w telles que

$$(x, y, z) = T(u, v, w)$$

pour une certaine fonction de classe C^1

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Comme dans la Section 4.1, on utilise le fait que la meilleure approximation linéaire de T est donnée par la matrice jacobienne DT . Par conséquent, le facteur à ajouter à notre intégrale lors du changement de coordonnées est la valeur absolue du jacobien

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} := \det(DT) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Théorème 4.3.1 (Changement de variables pour les intégrales triples). *Supposons que W et W^* sont des régions élémentaires de \mathbb{R}^3 , et que*

$$T: W^* \rightarrow W, \quad (u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

est de classe C^1 et est bijective, sauf éventuellement sur un ensemble qui est une union finie de graphes de fonctions de deux variables. Alors, pour toute fonction intégrable $f: W \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw.$$

Exercices.

4.3.1 ([MT11, §6.2, Exercice 20]). Soit l'application $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

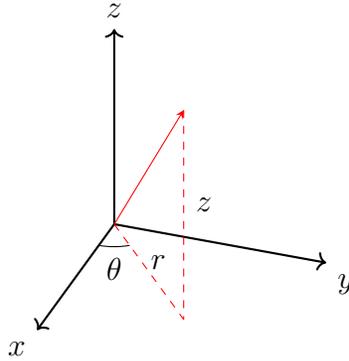
$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w).$$

- (a) Montrez que T est surjective sur la sphère unitaire ; c'est-à-dire que tout (x, y, z) avec $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ peut être écrit sous la forme $(x, y, z) = T(u, v, w)$ pour un certain (u, v, w) .
- (b) Montrez que T n'est pas injective.

4.4 Les coordonnées cylindriques

Appliquons à présent la formule générale de changement de variables pour les intégrales triples (Théorème 4.3.1) aux coordonnées cylindriques. Une bonne référence pour le matériel

de cette section est [FRYc, §3.6].



Les coordonnées cylindriques, notées (r, θ, z) , d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sont définies par :

- r est la distance de $(x, y, 0)$ à $(0, 0, 0)$, qui est la même que la distance de (x, y, z) à l'axe z ;
- θ est l'angle entre l'axe positif des x et la droite joignant $(x, y, 0)$ à $(0, 0, 0)$;
- z est la distance signée de (x, y, z) au plan xy (c'est-à-dire que c'est le même z qu'en coordonnées cartésiennes).

En d'autres termes, (r, θ) sont des coordonnées polaires dans le plan xy et z est le z habituel. Les coordonnées cartésiennes et cylindriques sont liées par :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, & z &= z, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan \frac{y}{x}, & z &= z. \end{aligned}$$

On considère donc l'application du changement de variables suivante

$$(x, y, z) = T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z). \quad (4.4)$$

La matrice jacobienne de T est

$$DT = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Son déterminant est

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

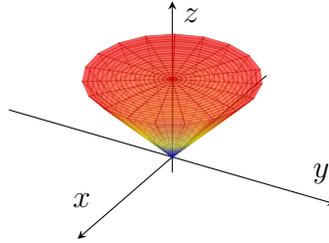
En appliquant le Théorème 4.3.1 à ce changement de variables, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.4.1 (Intégrales triples en coordonnées cylindriques). *Supposons que W est une région élémentaire de \mathbb{R}^3 et que l'application T dans (4.4) donne une bijection de W^* à W , sauf éventuellement pour les points sur la frontière de W^* . Alors*

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Exemple 4.4.2. Considérez le cône

$$W = \{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}.$$



Supposons que la densité du cône au point (x, y, z) soit égale à z . Quelle est la masse du cône ?

En coordonnées cylindriques, le cône est donné par

$$W^* = \{(r, \theta, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq z\}$$

On a ainsi

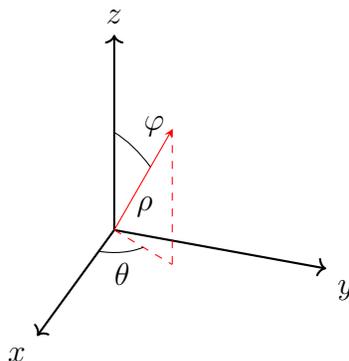
$$\begin{aligned} \text{Masse} &= \iiint_W z \, dV = \iiint_{W^*} r z \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^1 \int_0^z \int_0^{2\pi} r z \, d\theta \, dr \, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^z r z \, dr \, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2 z}{2} \right]_{r=0}^z dz = \pi \int_0^1 z^3 \, dz = \pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^1 = \frac{\pi}{4}. \quad \triangle \end{aligned}$$

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §3.6]: Q1–Q17.

4.5 Les coordonnées sphériques

Appliquons maintenant la formule générale du changement de variables pour les intégrales triples (Théorème 4.3.1) aux coordonnées sphériques. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYc, §3.7].



Les coordonnées sphériques, notées (ρ, θ, φ) , d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par :

- ρ est la distance de (x, y, z) à $(0, 0, 0)$;
- θ est l'angle entre l'axe positif des x et la droite joignant $(x, y, 0)$ à $(0, 0, 0)$;
- φ est l'angle entre l'axe positif des z et la droite joignant (x, y, z) à $(0, 0, 0)$.

La coordonnée sphérique θ est la même que la coordonnée cylindrique θ , tandis que la coordonnée sphérique φ est nouvelle. On restreint généralement ces coordonnées aux intervalles suivants

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Les coordonnées cartésiennes et sphériques sont liées par

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta, & y &= \rho \sin \varphi \sin \theta, & z &= \rho \cos \varphi, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \theta &= \arctan \frac{y}{x}, & \varphi &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \end{aligned}$$

On considère donc l'application du changement de variables suivante

$$(x, y, z) = T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi). \quad (4.5)$$

Comme on l'a noté dans la Exemple 1.12.2, on a

$$DT = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

et

$$\det(DT) = -\rho^2 \sin \varphi.$$

En appliquant le Théorème 4.3.1 à ce changement de variables, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.5.1 (Intégrale triple en coordonnées sphériques). *Supposez que W est une région élémentaire de \mathbb{R}^3 et que l'application T dans (4.5) donne une bijection de W^* à W , sauf éventuellement pour les points sur la frontière de W^* . Alors*

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W^*} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

Exemple 4.5.2 (Volume d'une boule). On considère la boule centrée à l'origine et de rayon R suivante:

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

En coordonnées sphériques, la boule est donnée par

$$B^* = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \text{Vol } B &= \iiint_B dx \, dy \, dz = \iiint_{B^*} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^R \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^\pi = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad \triangle \end{aligned}$$

Exercices.

Exercices tirés de [FRYb, §3.7]: Q1–Q31.

Chapitre 5

Champs vectoriels

La plupart des sujets restants dans ce manuscrit impliquent les champs vectoriels, aussi dit champs de vecteurs. Dans ce chapitre, on définit les champs de vecteurs et on discute de certaines notions connexes importantes. Une bonne référence pour le contenu de ce chapitre est [FRYe, §2.1–§2.3].

5.1 Définitions et premiers exemples

Définition 5.1.1 (Champ vectoriel). (a) Un *champ vectoriel dans le plan* (ou en deux dimensions) est une fonction

$$\mathbf{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

On désigne ses composantes par $\mathbf{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$.

(b) Un *champ vectoriel dans l'espace* (ou en trois dimensions) est une fonction

$$\mathbf{v}: W \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad W \subseteq \mathbb{R}^3.$$

On désigne ses composantes par $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$.

Exemples 5.1.2. (a) Si un fluide en mouvement occupe une région $W \subseteq \mathbb{R}^3$ et que la vitesse du fluide est $\mathbf{v}(x, y, z)$ à la position (x, y, z) , alors \mathbf{v} est appelé un *champ de vitesse*.

(b) S'il existe une force $\mathbf{F}(x, y, z)$ à la position (x, y, z) , alors \mathbf{F} est appelé un *champ de force*.

△

On note parfois les vecteurs unitaires dans le plan par

$$\mathbf{i} = (1, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1),$$

et les vecteurs unitaires dans l'espace par

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

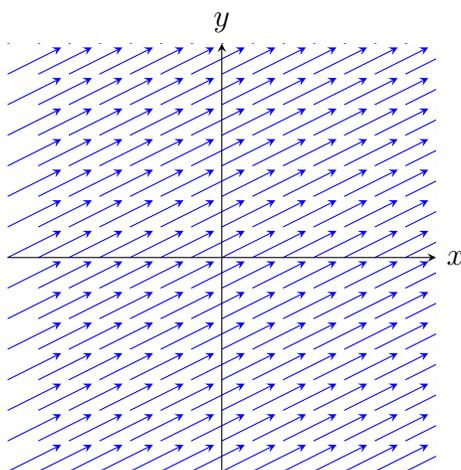
Notez qu'on utilise la notation \mathbf{i} pour désigner à la fois $(1, 0)$ et $(1, 0, 0)$, et de même pour \mathbf{j} . Le contexte devrait indiquer clairement ce qu'on entend par cela. Alternativement, si on considère \mathbb{R}^2 comme le sous-ensemble $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, alors il n'y a aucune ambiguïté.

Il est parfois utile d'esquisser un champ de vecteurs en dessinant ses valeurs sous forme de flèches en un certain nombre de points.

Exemple 5.1.3. Le champ vectoriel constant

$$\mathbf{v}(x, y) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} = (2, 1)$$

peut être représenté comme suit :

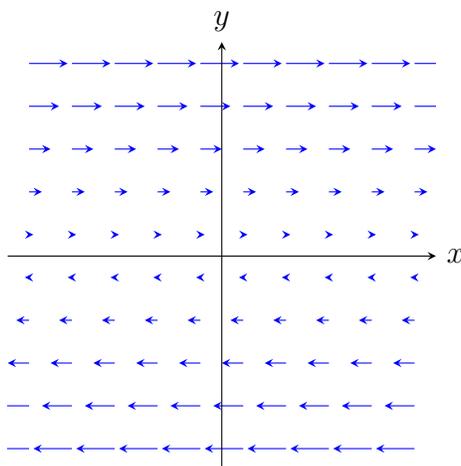


△

Exemple 5.1.4. Le champ vectoriel

$$\mathbf{v}(x, y) = y\mathbf{i}$$

peut être représenté comme suit :

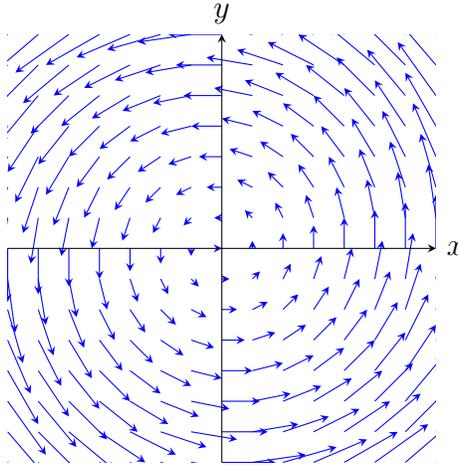


△

Exemple 5.1.5. Le champ vectoriel

$$\mathbf{v}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (-y, x)$$

peut être représenté comme suit :



△

On utilisera parfois la notation

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad \text{et} \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

pour désigner des points dans \mathbb{R}^3 , et décrire des champs de vecteurs en fonction de \mathbf{r} et r .

Exemple 5.1.6 (Gravité). Supposons qu'un objet de masse M est placé à l'origine $(0, 0, 0)$. La loi de la gravitation de Newton affirme que la magnitude de la force gravitationnelle subie par une masse m au point $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est donnée par $\frac{GMm}{r^2}$, où G est la constante gravitationnelle et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est la distance de l'origine (en d'autres termes, r est la distance entre les deux objets). Cette force est dirigée vers l'origine. Ainsi, puisque $-\frac{\mathbf{r}}{r}$ est un vecteur unitaire pointant vers l'origine, le champ de la force gravitationnelle pour l'objet de masse m est donné par

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}. \quad \triangle$$

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §2.1]: Q1–Q15.

5.2 Champs vectoriels conservatifs

Comme on le verra dans les chapitres suivants, il est beaucoup plus facile de travailler avec certains champs de vecteurs qu'avec d'autres. Dans cette section, on examinera un tel type de champ de vecteurs.

Rappelez-vous qu'à partir de (1.12), le *gradient* d'une fonction différentiable $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, est

$$\text{grad } f = \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

Si $m = 2$, alors on a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j},$$

et si $m = 3$, on a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

On s'en souvient parfois en écrivant

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.1)$$

Définition 5.2.1 (Champ vectoriel conservatif, potentiel, courbe et surface équipotentielle).

- (a) Un champ vectoriel \mathbf{F} est dit *conservatif* s'il existe une fonction φ telle que

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi.$$

Dans ce cas, φ est appelé un *potentiel* pour \mathbf{F} . Notez que si φ est un potentiel pour \mathbf{F} et $C \in \mathbb{R}$, alors $\varphi + C$ est aussi un potentiel pour \mathbf{F} .

- (b) Si $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ est un champ conservatif en trois dimensions avec le potentiel φ et $C \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble

$$\{(x, y, z) : \varphi(x, y, z) = C\}$$

est appelé une *surface équipotentielle*. De même, en deux dimensions,

$$\{(x, y) : \varphi(x, y) = C\}$$

est appelée une *courbe équipotentielle*.

Notez que les courbes et surfaces équipotentielles sont juste des ensembles de niveaux (voir (1.15)). Il en découle de la Proposition 1.8.6, que si $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ est un champ de vecteurs conservatif, alors le champ de vecteurs est orthogonal à la surface ou à la courbe équipotentielle.

Avertissement 5.2.2. Les physiciens utilisent une convention différente pour les potentiels. En physique, φ est appelé un potentiel pour \mathbf{F} lorsque $\mathbf{F} = -\nabla \varphi$. Notez le signe moins.

Exemple 5.2.3. Rappelez-vous le champ de force gravitationnel de l'Exemple 5.1.6. Cette force est conservative, avec un potentiel

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{GMm}{r}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{GMm \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{GMm}{r^3}x, \\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{GMm \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{GMm}{r^3}y, \\ \frac{\partial}{\partial z}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{GMm \cdot 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{GMm}{r^3}z.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^3}(x, y, z) = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad \triangle$$

Exemple 5.2.4. Considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}.$$

Montrons que ce champ est conservatif et trouvons un potentiel. Un potentiel φ devrait satisfaire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = x \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = -y. \quad (5.2)$$

Afin de satisfaire la première équation de (5.2), il faudrait avoir

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \psi(y),$$

où $\psi(y)$ est une fonction de y seulement. Pour que cela satisfasse également la deuxième équation de (5.2), il faudrait que

$$-y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} + \psi(y) \right) = \psi'(y).$$

Ceci est vrai si et seulement si

$$\psi(y) = -\frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C$$

est un potentiel pour tout $C \in \mathbb{R}$. △

On termine cette section par un exemple d'un champ qui *n'est pas* conservatif.

Exemple 5.2.5. Considérons le champ vectoriel

$$\mathbf{v}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Démontrons par contradiction que \mathbf{v} n'est pas conservatif. Ainsi, on commence par supposer que \mathbf{v} est conservatif (et essayons ensuite d'obtenir une contradiction). Donc $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ pour une certaine fonction différentielle $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On a donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = -y \quad \text{and} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = x.$$

En procédant comme dans l'Exemple 5.2.4, on a

$$\varphi(x, y) = -xy + \psi(y)$$

pour une certaine fonction $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons alors

$$x = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-xy + \psi(y)) = -x + \psi'(y) \iff \psi'(y) = 2x.$$

Mais ceci est une contradiction, puisque $\psi(y)$ ne peut pas dépendre de x . Par conséquent, \mathbf{v} n'est pas conservatif. \triangle

Exercices.

On reporte les exercices jusqu'à la Section 5.3.

5.3 Le rotationnel

Introduisons maintenant la notion importante du rotationnel d'un champ de vecteurs. En plus d'être importante dans les chapitres suivants, on verra que le rotationnel donne un test important pour les champs de vecteurs conservatifs.

Définition 5.3.1 (Rotationnel). Le *rotationnel* d'un champ de vecteurs $\mathbf{F}(x, y, z)$, est définie par

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(La formule du déterminant est juste un moyen mnémotechnique.) Si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, on dira que \mathbf{F} est *irrotationnel*.

Notez que le rotationnel ne s'applique qu'aux champs vectoriels en tridimensionnels. Cependant, tout champ de vecteurs $\mathbf{v}(x, y)$ bidimensionnel peut être étendu à un champ de vecteurs tridimensionnel en l'identifiant comme suit

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y).$$

Son rotationnel est alors donnée par

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (5.3)$$

Parfois, on réutilisera simplement la notation \mathbf{v} pour l'extension tridimensionnelle et en écrira $\nabla \times \mathbf{v}$ pour son rotationnel. La quantité

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

est parfois appelée la *rotationnel scalaire* du champ de vecteurs bidimensionnel \mathbf{v} .

Exemples 5.3.2. (a) Considérez le champ de force gravitationnel

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{3GMmxy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, & \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{3GMmxz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{3GMmxy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, & \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{3GMmyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= \frac{3GMmxz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, & \frac{\partial F_3}{\partial y} &= \frac{3GMmyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Ainsi on a $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) Considérez le champ vectoriel

$$\mathbf{v}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (-y, x, 0)$$

de l'Exemple 5.1.5 (étendu à trois dimensions). On a

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 1.$$

Donc

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\mathbf{k}.$$

△

Théorème 5.3.3 (Test pour les champs conservatifs). (a) *Supposons que $\mathbf{F}(x, y)$ est un champ de vecteurs de C^2 dans le plan. Si \mathbf{F} est conservatif, alors*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

(b) Supposons que $\mathbf{F}(x, y, z)$ est un champ vectoriel dans l'espace de C^2 . Si \mathbf{F} est conservatif, alors

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Notez que, en utilisant (5.3), les deux situations de Théorème 5.3.3 impliquent la condition $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Proof. On donnera la preuve de (b), puisque la preuve de (a) est similaire et plus facile (et peut être trouvée dans [FRYe, Th. 2.3.9].) Supposons que \mathbf{F} est conservatif. Alors il existe un potentiel φ avec $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. En d'autres termes, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = F_3.$$

En utilisant le théorème de Clairaut (Théorème 1.9.6), on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial y} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ainsi $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. □

Exemple 5.3.4. Dans l'Exemples 5.3.2(b), on a vu que le champ vectoriel $\mathbf{v}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ satisfait

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Ainsi, selon le Théorème 5.3.3(a), on peut conclure que \mathbf{v} n'est pas conservatif. On l'a aussi prouvé directement dans l'Exemple 5.2.5. △

Avertissement 5.3.5. La réciproque du Théorème 5.3.3 est fautive ! Si $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, alors vous pouvez utiliser le Théorème 5.3.3 pour conclure que \mathbf{F} n'est pas conservatif. Cependant, si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, vous ne pouvez pas conclure que \mathbf{F} est conservatif sans faire plus de calculs.

Exemple 5.3.6. Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{v}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Alors

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Cependant, \mathbf{v} n'est pas conservatif. On le prouvera dans l'Exemple 6.4.4. △

Pour conclure cette section, on présentera un dernier exemple.

Exemple 5.3.7 ([FRYe, Exemple 2.3.13]). Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + 2xz^2 - 1)\mathbf{i} + (2x + 1)y\mathbf{j} + (2x^2z + z^3)\mathbf{k}.$$

On veut déterminer si ce champ de vecteurs est conservatif ou non et, s'il l'est, trouver un potentiel.

Appliquons d'abord le test des champs conservatifs (Théorème 5.3.3). Pour cela, on calcule

$$\nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2xz^2 - 1 & (2x + 1)y & 2x^2z + z^3 \end{bmatrix} = 0\mathbf{i} - (4xz - 4xz)\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Donc \mathbf{F} passe le test. Cependant, il faut se rappeler (Avertissement 5.3.5) que cela, en soi, n'implique pas que \mathbf{F} est conservatif.

Essayons de trouver un potentiel φ . Il faudrait donc résoudre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = y^2 + 2xz^2 - 1, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = (2x + 1)y, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = 2x^2z + z^3. \quad (5.6)$$

De (5.4), on a

$$\varphi(x, y, z) = xy^2 + x^2z^2 - x + \psi(y, z).$$

Ceci satisfait (5.5) si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x^2z^2 - x + \psi(y, z)) = (2x + 1)y$$

$$\iff 2xy + \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = (2x + 1)y$$

$$\iff \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = y$$

$$\iff \psi(y, z) = \frac{y^2}{2} + \zeta(z).$$

Pour conclure, ceci satisfait à (5.6) si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(xy^2 + x^2z^2 - x + \frac{y^2}{2} + \zeta(z) \right) = 2x^2z + z^3$$

$$\iff 2x^2z + \zeta'(z) = 2x^2z + z^3$$

$$\iff \zeta(z) = \frac{z^4}{4} + C,$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, un potentiel possible (celui pour lequel $C = 0$) est

$$\varphi(x, y, z) = xy^2 + x^2z^2 - x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^4}{4}.$$

On peut vérifier nos calculs en calculant le gradient :

$$\nabla\varphi(x, y, z) = (y^2 + 2xz^2 - 1)\mathbf{i} + (2x + 1)y\mathbf{j} + (2x^2z + z^3)\mathbf{k} = \mathbf{F}(x, y, z). \quad \triangle$$

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §2.3]: Q2–Q11.

Chapitre 6

Intégrales curvilignes

Dans ce chapitre, nous verrons comment intégrer le long des courbes. Il existe deux types de telles intégrales: intégrer un *champ scalaire* ou un *champ de vecteurs*. Le premier s'appelle une *intégrale curviligne*, tandis que le second est appelé une *circulation*. Une bonne référence pour le matériel de ce chapitre est [FRYe, Ch. 1 and §2.4].

6.1 Intégrales curvilignes de champs scalaires

Dans cette section, on discutera l'intégration d'un champ scalaire (juste un autre nom pour une fonction à valeur réelle) le long d'une courbe.

On rappelle de la Définition 1.7.1 qu'un *chemin* est une application

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. (Dans la Section 1.7, on a utilisé la notation $c(t)$. On commencera maintenant à utiliser la notation en gras, telle que $\mathbf{r}(t)$, pour mettre l'emphase sur la nature vectorielle de ces chemins.) Dans ce chapitre, on suppose que tous les chemins sont continus. Une *courbe* est l'image d'un chemin :

$$C = \{\mathbf{r}(t) : a \leq t \leq b\}.$$

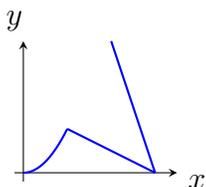
Si $\mathbf{r}(t)$ est injectif, on dit que $\mathbf{r}(t)$ est une *paramétrisation* de la courbe C . On acceptera également la possibilité que $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, auquel cas on dira que C est une *courbe fermée*.

Définition 6.1.1 (Classe C^k par morceaux). On dit qu'une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k par morceaux s'il existe des nombres réels $a = t_0 < t_1 < \dots < t_j = b$ tels que les restrictions $f|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sont C^k pour tout $i = 1, \dots, j$.

Exemple 6.1.2. La fonction

$$f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{cases} (t, t^2) & 0 \leq t \leq 1, \\ (2t - 1, 2 - t) & 1 \leq t \leq 2, \\ (5 - t, 3t - 6) & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

est C^1 par morceaux.



En fait, c'est C^k par morceaux pour tout k (donc C^∞ par morceaux). △

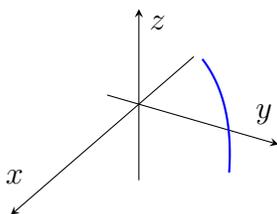
Exemple 6.1.3. Une courbe peut avoir de nombreuses différentes paramétrisations. Par exemple,

$$\mathbf{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, 1 + t, 1 - t)$$

et

$$\mathbf{s}: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{s}(t) = ((1 - 2t)^2, 2 - 2t, 2t)$$

tous deux paramétrisent la même courbe.



△

Supposons que nous ayons une courbe C paramétrisée par $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Supposons aussi que cette courbe est, en fait, un fil dont la densité au point \mathbf{r} est $\rho(\mathbf{r})$. Calculons la masse de ce fil.

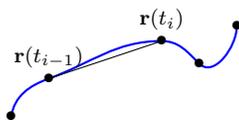
Nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux, chacun de longueur

$$\Delta t = \frac{b - a}{n}.$$

On pose

$$t_i = a + i\Delta t$$

désignent le point final du i -ème intervalle. Nous approchons la longueur de la partie de la courbe entre $\mathbf{r}(t_{i-1})$ et $\mathbf{r}(t_i)$ par $\|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|$ et la masse de cette partie de la courbe par $\rho(\mathbf{r}(t_i))\|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|$.



Cela nous donne une masse approximative du fil

$$\sum_{i=1}^n \rho(\mathbf{r}(t_i))\|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \rho(\mathbf{r}(t_i)) \left\| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| \Delta t.$$

Nous prenons alors la limite $n \rightarrow \infty$. Si $\mathbf{r}(t)$ est C^1 par morceaux et $\rho(\mathbf{r})$ est continu, on obtient

$$\text{Masse de } C = \int_a^b \rho(\mathbf{r}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

Définition 6.1.4 (Intégrale curviligne, intégrale le long d'une courbe). Supposons que C est une courbe paramétrisée par

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad a \leq t \leq b,$$

que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et que $C \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. On définit

$$\int_C f ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (6.1)$$

Dans cette notation, C est la courbe et ds indique l'élément de la longueur de l'arc. L'intégrale (6.1) s'appelle une *intégrale curviligne*.

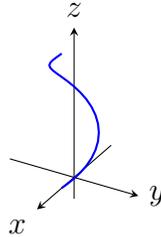
Si \mathbf{r} est C^1 par morceaux et f est continu par morceaux, alors l'intégrale (6.1) existe toujours. Notez que $\int_C f ds$ ne concerne que la courbe C , et non la paramétrisation \mathbf{r} . On le justifiera dans la Section 6.3.

Définition 6.1.5 (Longueur d'une courbe). Supposons que C est une courbe paramétrée par un chemin de classe C^1 par morceaux $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \leq t \leq b$. Alors la *longueur* de C est

$$\text{Longueur}(C) := \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Exemple 6.1.6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons que nous ayons un fil hélicoïdal paramétrisé par

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Aussi, supposons que la densité au point (x, y, z) du fil est égale à z . Calculons la longueur et la masse du fil.

On a

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

et donc

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ainsi, la longueur du fil est

$$\int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{a^2 + b^2} dt = (b - a) \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La masse du fil est

$$\int_C bt \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b bt \sqrt{a^2 + b^2} dt = \left[b \sqrt{a^2 + b^2} \frac{t^2}{2} \right]_{t=a}^b = \frac{1}{2} b (b^2 - a^2) \sqrt{a^2 + b^2}. \quad \triangle$$

Définition 6.1.7 (Valeur moyenne le long d'une courbe). La *valeur moyenne* d'une fonction f sur une courbe C est

$$\frac{\int_C f ds}{\text{Longueur}(C)}.$$

Exemple 6.1.8. Soit

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{3}t^2, t^3 - t), \quad t \in [-1, 1].$$

Trouvez la valeur x moyenne sur la courbe correspondante C . On a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (2\sqrt{3}t, 3t^2 - 1), \\ \|\mathbf{r}'(t)\|^2 &= (2\sqrt{3}t)^2 + (3t^2 - 1)^2 \\ &= 12t^2 + 9t^4 - 6t^2 + 1 \\ &= 9t^4 + 6t^2 + 1 \\ &= (3t^2 + 1)^2 \\ \|\mathbf{r}'(t)\| &= 3t^2 + 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

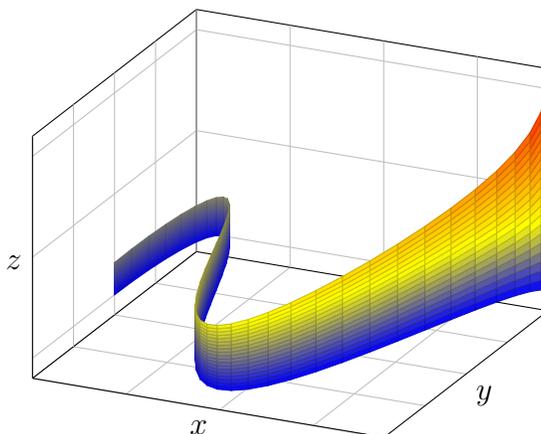
$$\text{Longueur}(C) = \int_C ds = \int_{-1}^1 (3t^2 + 1) dt = [t^3 + t]_{t=-1}^1 = 4$$

et

$$\begin{aligned} \int_C x ds &= \int_{-1}^1 \sqrt{3}t^2(3t^2 + 1) dt = \sqrt{3} \int_{-1}^1 (3t^4 + t^2) dt = \sqrt{3} \left[\frac{3t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_{t=-1}^1 \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{6}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{28\sqrt{3}}{15}. \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur x moyenne est $\frac{7\sqrt{3}}{15}$. △

Nous concluons cette section avec une autre interprétation intuitive des intégrales curvilignes. Supposons que $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un chemin avec image C et que $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs positif ou nul, soit $f(\mathbf{r}(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors l'intégrale curviligne $\int_C f ds$ est l'aire de la surface de la clôture le long de la courbe C dont la hauteur au point $\mathbf{r}(t)$ est donnée par $f(\mathbf{r}(t))$.



Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §1.6]: Q1–Q11.

6.2 Intégrales curvilignes de champs vectoriels

Dans la Section 6.1 on a vu comment intégrer une *fonction scalaire* le long d'une courbe. Dans cette section, on verra un deuxième type d'intégrale le long des courbes. Cette fois, nous allons intégrer une fonction à *valeurs vectorielles* le long d'une courbe.

Si $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation d'une courbe C , on dit que \mathbf{F} est un *champ vectoriel le long du chemin \mathbf{r}* (ou *sur la courbe C*) si $\mathbf{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs avec $C \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Autrement dit, le domaine de \mathbf{F} contient la courbe C .

Définition 6.2.1 (Circulation). Supposons que $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un chemin C^1 par morceaux et que \mathbf{F} est un champ de vecteurs continu par morceaux sur \mathbf{r} . On définit l'*intégrale curviligne* ou la *circulation* de \mathbf{F} le long \mathbf{r} par

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} := \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, alors la notation $\oint_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ est également utilisée. Si $n = 3$ et $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, on écrit aussi

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz).$$

Si $n = 2$ et $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, on écrit parfois

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} (F_1 dx + F_2 dy).$$

La notation $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ dans la Définition 6.2.1 est destiné à vous rappeler le produit scalaire. Si

$$d\mathbf{s} = (dx, dy, dz),$$

est un déplacement infinitésimal, alors $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

Exemple 6.2.2. Supposez que

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1] \quad \text{and} \quad \mathbf{F}(x, y) = (-y, x).$$

Calculez $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (1, 2t) \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2) = (-t^2, t) \end{aligned}$$

et donc,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (-t^2, t) \cdot (1, 2t) = -t^2 + 2t^2 = t^2.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^1 = \frac{1}{3}. \quad \triangle$$

Définition 6.2.3 (Travail). Si $\mathbf{F}(t)$ désigne une force déplaçant une particule dont la position est donnée par $\mathbf{r}(t)$, avec t indiquant le temps, alors $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ est le *travail* effectué par cette force.

Exemple 6.2.4. Rappelez-vous de l'Exemple 5.1.6 que le champ de la force gravitationnelle pour un objet de masse m en présence d'une masse M à l'origine est donné par

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r},$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est la position de l'objet de masse m . Supposons que cet objet se déplace le long d'un chemin

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Quel est le travail effectué par la gravité? Par la Définition 6.2.3,

$$\text{Travail} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = - \int_a^b \frac{GMm}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Avec la substitution

$$u = \|\mathbf{r}(t)\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2,$$

on a

$$du = 2x(t)x'(t) dt + 2y(t)y'(t) dt + 2z(t)z'(t) dt = 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Ainsi

$$\text{Travail} = - \int_{\|\mathbf{r}(a)\|^2}^{\|\mathbf{r}(b)\|^2} \frac{GMm}{2u^{3/2}} du = \left[\frac{GMm}{\sqrt{u}} \right]_{u=\|\mathbf{r}(a)\|^2}^{\|\mathbf{r}(b)\|^2} = \frac{GMm}{\|\mathbf{r}(b)\|} - \frac{GMm}{\|\mathbf{r}(a)\|} = \frac{GMm}{r_{\text{arrivée}}} - \frac{GMm}{r_{\text{départ}}},$$

où $r_{\text{départ}}$ est la distance de l'origine au début du chemin et $r_{\text{arrivée}}$ est la distance de l'origine à la extrémité du chemin. Notez que le travail total effectué ne dépend que des extrémités du chemin, et non du chemin suivi entre les deux ou du temps nécessaire pour se déplacer entre ces deux points. On expliquera ce phénomène dans l'Exemple 6.4.2. \triangle

Exercices.

On reporte les exercices à la Section 6.5.

6.3 Reparamétrisation

Nos définitions des intégrales curvilignes (Définition 6.1.4) et des circulations (Définition 6.2.1) impliquent toutes deux une paramétrisation $\mathbf{r}(t)$ d'une courbe C . Il est naturel de se demander comment ces intégrales dépendent de la paramétrisation. On examinera cette question dans cette section.

Supposons que

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{r}}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sont deux paramétrisations de la même courbe. En d'autres termes, elles ont la même image C . Comme les paramétrisations sont inversibles, on a la fonction composée

$$g := \mathbf{r}^{-1} \circ \tilde{\mathbf{r}}: [c, d] \rightarrow [a, b]. \quad (6.2)$$

Ainsi

$$\tilde{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(g(u)), \quad u \in [c, d].$$

Nous appelons $\tilde{\mathbf{r}}$ une *reparamétrisation* de \mathbf{r} .

Puisque nous supposons que \mathbf{r} et $\tilde{\mathbf{r}}$ sont continues, l'application g est une bijection continue. Elle est donc soit croissante, soit décroissante. Si g est croissante, on dit que \mathbf{r} et $\tilde{\mathbf{r}}$ ont la *même orientation*, et que la reparamétrisation *préserve l'orientation*. Si g est décroissante, on dit que \mathbf{r} et $\tilde{\mathbf{r}}$ ont des *orientations opposées*, et que la reparamétrisation *inverse l'orientation*.

Théorème 6.3.1 (Reparamétrisation pour les intégrales curvilignes). *Sous les hypothèses ci-dessus,*

$$\int_c^d f(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \|\tilde{\mathbf{r}}'(u)\| du = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Proof. Ceci découle de la formule du changement de variables. En posant $t = g(u)$, on obtient

$$dt = g'(u) du, \quad \tilde{\mathbf{r}}'(u) = \frac{d}{du} \mathbf{r}(g(u)) = \mathbf{r}'(g(u)) g'(u).$$

Si g est croissante, on a $g'(u) \geq 0$ pour $u \in [a, b]$, $g(c) = a$ et $g(d) = b$. Ainsi,

$$\|\tilde{\mathbf{r}}'(u)\| = \|\mathbf{r}'(g(u)) g'(u)\| = \|\mathbf{r}'(g(u))\| g'(u).$$

Par conséquent,

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_c^d f(\mathbf{r}(g(u))) \|\mathbf{r}'(g(u))\| g'(u) du = \int_c^d f(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \|\tilde{\mathbf{r}}'(u)\| du.$$

Nous le laissons comme exercice (Exercice 6.3.1) la preuve du cas où g est décroissante. \square

Le Théorème 6.3.1 montre que, malgré qu'il faut paramétriser toute courbe pour pouvoir intégrer le long de celle-ci, l'intégrale de la Définition 6.1.4 est indépendante de la paramétrisation. Cette situation est un peu plus subtile pour les intégrales curvilignes de champs vectoriels (Définition 6.2.1).

Théorème 6.3.2 (Reparamétrisation des circulations). *Supposons que \mathbf{F} est un champs de vecteurs défini sur le chemin C^1 par morceaux $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, et que $\tilde{\mathbf{r}}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une reparamétrisation de \mathbf{r} . Si $\tilde{\mathbf{r}}$ préserve l'orientation, alors*

$$\int_{\tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

et si $\tilde{\mathbf{r}}$ inverse l'orientation, alors

$$\int_{\tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

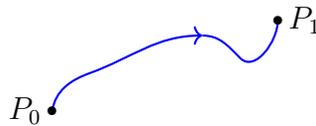
Proof. Comme dans la preuve du Théorème 6.3.1, on définit g comme dans (6.2) et posons $t = g(u)$. Alors

$$dt = g'(u) du, \quad \tilde{\mathbf{r}}'(u) = \frac{d}{du} \mathbf{r}(g(u)) = \mathbf{r}'(g(u))g'(u).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \mathbf{F}(\mathbf{r}(g(u))) \cdot \mathbf{r}'(g(u))g'(u) du \\ &= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \cdot \tilde{\mathbf{r}}'(u) du \\ &= \begin{cases} \int_c^d \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \cdot \tilde{\mathbf{r}}'(u) du & \text{si } \tilde{\mathbf{r}} \text{ préserve l'orientation,} \\ \int_d^c \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \cdot \tilde{\mathbf{r}}'(u) du & \text{si } \tilde{\mathbf{r}} \text{ inverse l'orientation.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{\tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \tilde{\mathbf{r}} \text{ préserve l'orientation,} \\ - \int_{\tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \tilde{\mathbf{r}} \text{ inverse l'orientation.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Le Théorème 6.3.2 affirme que les intégrales curvilignes sont indépendantes de la paramétrisation d'une courbe, sauf que l'inversion de l'orientation introduit un signe négatif. Il est donc naturel de discuter d'une *courbe orientée* qui est, par définition, une courbe C avec un choix de point de départ P_0 et de point final P_1 . On indique l'orientation d'une courbe par une flèche sur la courbe orientée de P_0 à P_1 :



Une paramétrisation d'une telle courbe orientée est une paramétrisation $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\mathbf{r}(a) = P_0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}(b) = P_1.$$

Par conséquent, par le Théorème 6.3.2, pour une courbe orientée C , on peut définir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (6.3)$$

où \mathbf{r} est n'importe quel paramétrisation de C .

Exercices.

6.3.1. Complétez la preuve du Théorème 6.3.1 en traitant le cas où g est décroissante.

Davantage d'exercices sont reportés à la Section 6.5.

6.4 Intégrales curvilignes de champs conservatifs

Il s'avère que le calcul des intégrales curvilignes de champs vectoriel conservatifs est particulièrement facile.

Théorème 6.4.1 (Théorème fondamental de l'intégrale curvilignes). *Supposons que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ est un champ de vecteurs conservatif. Alors si C est une courbe orientée qui commence à P_0 et se termine à P_1 , nous avons*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0).$$

Proof. On donnera uniquement la démonstration pour le cas tridimensionnel; la preuve en deux dimensions est presque identique. Soit

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

une paramétrisation de C , avec $\mathbf{r}(a) = P_0$ et $\mathbf{r}(b) = P_1$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla\varphi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt}(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi(x(t), y(t), z(t))) dt \quad (\text{selon règle de la composée}) \\ &= \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)) \quad (\text{selon le théorème fondamental du calcul intégral}) \\ &= \varphi(P_1) - \varphi(P_0). \quad \square \end{aligned}$$

À condition d'intégrer un champ de vecteurs conservatif (dont on peut trouver la fonction potentielle), le Théorème 6.4.1 fournit un moyen *extrêmement* facile pour évaluer les intégrales curvilignes. En une dimension, le Théorème 6.4.1 se réduit au théorème fondamental du calcul intégral.

Exemple 6.4.2. Rappelez-vous de l'Exemple 5.2.3 que le champ de la force gravitationnelle \mathbf{F} est conservatif, avec une fonction potentielle

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{GMm}{r}, \quad \text{where } r = \|\mathbf{r}\|.$$

Ainsi, le travail effectué par la gravité sur une particule se déplaçant le long d'une courbe C , commençant au point (x_0, y_0, z_0) et se terminant au point (x_1, y_1, z_1) est

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{GMm}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{GMm}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}.$$

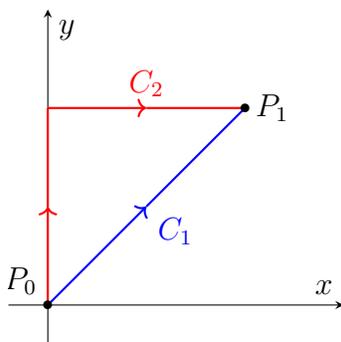
Le travail ne dépend pas de la courbe, mais seulement de son point de départ et de son point d'arrivée. De plus, cela ne dépend pas du temps qu'il faut à la particule pour se déplacer entre ces deux points. Ceci concorde avec nos calculs dans l'Exemple 6.2.4. \triangle

Exemple 6.4.3. Considérez le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (y^2 + 1)\mathbf{j}$$

Considérez aussi les deux courbes suivantes, toutes deux commençant à $P_0 = (0, 0)$ et se terminant à $P_1 = (1, 1)$.

- (a) Soit C_1 le segment de droite de P_0 à P_1 .
- (b) Soit C_2 la courbe composée de deux segments de droites de P_0 à $(0, 1)$ puis de $(1, 0)$ à P_1 .



Calculez l'intégrale curviligne $\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ pour chacune de ces deux courbes.

- (a) On paramétrise C_1 par

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t \in [0, 1].$$

Alors

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^2\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (t^2\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 1) dt = \left[\frac{2t^3}{3} + t \right]_{t=0}^1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

- (b) On paramétrise C_2 avec un chemin C^1 par morceaux. La courbe C_2 est la réunion des courbes C_3 et C_4 , où C_3 est le segment de droite de $(0, 0)$ à $(0, 1)$ et C_4 est le segment de droite de $(0, 1)$ à $(1, 1)$. Ainsi, on a les paramétrisations suivantes de C_3 par

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j}, \quad t \in [0, 1],$$

et de C_4 par

$$\mathbf{p}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad t \in [0, 1].$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt + \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{p}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 1)\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} dt + \int_0^1 (t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 1) dt + \int_0^1 t dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_{t=0}^1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^1 = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

On remarque que les intégrales le long de C_1 et C_2 sont différentes, malgré qu'elles ont le même point de départ et le même point final. (Voir [FRYe, Exemple 2.4.3] pour des intégrales le long de davantage de courbes.) L'utilisation du Théorème 6.4.1 implique que \mathbf{F} n'est pas un champ vectoriel conservatif. \triangle

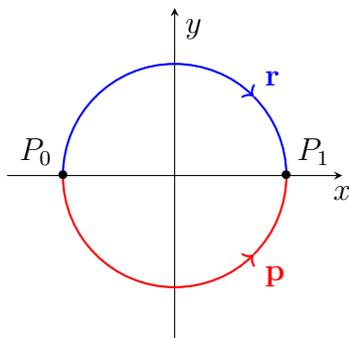
Exemple 6.4.4. Considérez le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

On a affirmé dans l'Exemple 5.3.6 que ce champ de vecteurs *n'est pas* conservatif même s'il est irrotationnel (c'est-à-dire $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$). Une façon de prouver qu'il n'est pas conservatif est de montrer que les intégrales le long de deux courbes distinctes avec le même point de départ et le même point d'arrivée sont différentes.

Soient

$$\begin{aligned} P_0 &= (-1, 0), & P_1 &= (1, 0), \\ \mathbf{r}(t) &= (-\cos t, \sin t), & t &\in [0, \pi], \\ \mathbf{p}(t) &= (-\cos t, -\sin t), & t &\in [0, \pi]. \end{aligned}$$



On a alors

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
 &= \int_0^\pi (-\sin t, -\cos t) \cdot (\sin t, \cos t) dt \\
 &= \int_0^\pi (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^\pi (-1) dt \\
 &= -\pi
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{p}'(t) dt \\
 &= \int_0^\pi (\sin t, -\cos t) \cdot (\sin t, -\cos t) dt \\
 &= \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^\pi dt \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Comme les deux intégrales sont différentes, le champ vectoriel \mathbf{F} ne peut être conservatif. \triangle

Remarque 6.4.5. Notez que le champ de vecteurs \mathbf{F} de l'Exemple 6.4.4 est défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et que les chemins C_1 et C_2 vont des directions opposées de l'origine. Dans un sens, \mathbf{F} est le *seul* champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui a un rotationnel nul mais qui n'est pas conservatif. Plus précisément, tout autre champ vectoriel de ce type est la somme d'un multiple par scalaire de \mathbf{F} et d'un champ de vecteurs conservatif. Ceci est lié à une théorie mathématique avancée connue sous le nom de [cohomologie de de Rham](#).

Exercices.

On reporte les exercices à la Section 6.5.

6.5 L'indépendance des chemins

Comme on a vu dans la Théorème 6.4.1, l'intégrale linéaire d'un champ de vecteurs conservatif est *indépendante du chemin*, dans le sens qu'elle ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée du chemin d'intégration. Dans cette section, on examine ce phénomène plus en détail. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYe, §2.4.1].

Pour simplifier notre discussion, nous limiterons notre attention aux champs vectoriels définis et continus sur *tout* \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Rappelez-vous qu'une courbe est *fermée* si elle commence et se termine au même point.

Théorème 6.5.1. *Supposons que \mathbf{F} est un champ de vecteurs défini et continu sur tout \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (a) \mathbf{F} est conservatif.
- (b) Pour toute courbe fermée C , on a $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.
- (c) L'intégrale $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ est indépendante du chemin. Plus précisément, pour tout point P_0, P_1 , on a $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ pour toutes courbes C_1, C_2 qui commencent à P_0 et finissent à P_1 .

Proof. (a) \implies (b): Supposons que (a) est vraie. Il existe donc une fonction φ telle que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Alors, si C est une courbe fermée qui commence et se termine à P_0 , par le Théorème 6.4.1 on a

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(P_0) - \varphi(P_0) = 0.$$

(b) \implies (c): Supposons que (b) est vraie. Soient C_1, C_2 des chemins qui commencent à P_0 et se terminent à P_1 . Définissez \tilde{C}_2 comme étant l'opposé du chemin C_2 (c'est-à-dire que nous suivons C_2 dans la direction opposée). Soit alors C le chemin C_1 suivi du chemin \tilde{C}_2 . Ainsi, C est un chemin fermé commençant et se terminant à P_0 . Alors, en utilisant (b) et le Théorème 6.3.2, on a

$$0 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\tilde{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Ainsi $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

(c) \implies (a): Supposons que (c) est vraie. On cherche une fonction φ telle que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Par le Théorème 6.4.1, une telle fonction devrait satisfaire

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})$$

pour tout chemin C de $\mathbf{0}$ à \mathbf{x} . Puisque l'ajout d'une constante à un potentiel donne un autre potentiel, on peut supposer que $\varphi(\mathbf{0}) = 0$. Définissons donc φ par

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

où C est un chemin quelconque de $\mathbf{0}$ à \mathbf{x} . Puisque nous supposons que (c) est vrai, cette définition de $\varphi(\mathbf{x})$ ne dépend pas du chemin C que nous choisissons.

Nous voulons maintenant montrer que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Fixons un point \mathbf{x} et une courbe quelconque $C_{\mathbf{x}}$ qui commence à $\mathbf{0}$ et se termine à \mathbf{x} . Alors, pour tout vecteur \mathbf{u} , soit $D_{\mathbf{u}}$ la courbe avec une paramétrisation

$$\mathbf{r}_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{u}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, soit $C_{\mathbf{x}} + D_{s\mathbf{u}}$ la courbe qui suit d'abord $C_{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{0}$ à \mathbf{x} et ensuite $D_{s\mathbf{u}}$ de \mathbf{x} à $\mathbf{x} + s\mathbf{u}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) &= \int_{C_{\mathbf{x}} + D_{s\mathbf{u}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{D_{s\mathbf{u}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) \cdot (s\mathbf{u}) dt, \end{aligned}$$

puisque $\mathbf{r}'_{s\mathbf{u}} = s\mathbf{u}$. Dans la seconde intégrale, effectuez le changement de variables

$$v = ts, \quad dv = s dt.$$

Alors

$$\varphi(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) = \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_0^s \mathbf{F}(\mathbf{x} + v\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} dv.$$

La première intégrale est indépendante de s . En utilisant le théorème fondamental du calcul intégral pour la deuxième intégrale, on a

$$\frac{d}{ds} \varphi(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) \Big|_{s=0} = \mathbf{F}(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \Big|_{s=0} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

En appliquant ceci avec $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ on obtient

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{x}), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\mathbf{x}), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\mathbf{x}) \right) = (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

comme voulu. □

On peut utiliser le Théorème 6.5.1 pour caractériser complètement les champs vectoriels conservatifs sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Théorème 6.5.2. *Soit \mathbf{F} un champ de vecteurs défini et de classe C^1 sur tout \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Alors \mathbf{F} est conservatif si et seulement si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (c'est-à-dire que \mathbf{F} est irrotationnel).*

Proof. On donnera la preuve pour le cas \mathbb{R}^3 . La preuve pour le cas \mathbb{R}^2 est très similaire et peut être trouvée dans [FRYe, Th. 2.4.8]. On a déjà vu dans le Théorème 5.3.3 que tout champ de vecteurs conservatif est irrotationnel. Il reste à montrer l'implication inverse.

Supposons que $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ est un champ de vecteurs défini et de classe C^1 sur tout \mathbb{R}^3 . De plus, supposons que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ainsi

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (6.4)$$

On veut trouver une fonction φ telle que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. On veut donc que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z). \quad (6.5)$$

La fonction φ satisfait à la première équation dans (6.5) si et seulement si il existe une fonction $\psi(y, z)$ telle que

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x F_1(X, y, z) dX + \psi(y, z).$$

Cela satisfera la deuxième équation dans (6.5) si et seulement si

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^x F_1(X, y, z) dX + \psi(y, z) \right) \\ &= \int_0^x \frac{\partial F_1}{\partial y}(X, y, z) dX + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y, z). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial y}(y, z) &= F_2(x, y, z) - \int_0^x \frac{\partial F_1}{\partial y}(X, y, z) dX \\ &= F_2(x, y, z) - \int_0^x \frac{\partial F_2}{\partial x}(X, y, z) dX && \text{(selon (6.4))} \\ &= F_2(x, y, z) - F_2(X, y, z) \Big|_{X=0}^x && \text{(par théorème fondamental du calcul intégral)} \\ &= F_2(0, y, z). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut choisir

$$\psi(y, z) = \int_0^y F_2(0, Y, z) dY + \chi(z)$$

pour une certaine fonction χ ne dépendant que de $\chi(z)$.

On a donc maintenant

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x F_1(X, y, z) dX + \int_0^y F_2(0, Y, z) dY + \chi(z).$$

Cela satisfait la dernière équation dans (6.5) si et seulement si

$$F_3(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^x F_1(X, y, z) dX + \int_0^y F_2(0, Y, z) dZ + \chi(z) \right) \\
&= \int_0^x \frac{\partial F_1}{\partial z}(X, y, z) dX + \int_0^y \frac{\partial F_2}{\partial z}(0, Y, z) dZ + \frac{\partial \chi}{\partial z}(z) \\
&= \int_0^x \frac{\partial F_3}{\partial x}(X, y, z) dX + \int_0^y \frac{\partial F_3}{\partial y}(0, Y, z) dZ + \frac{\partial \chi}{\partial z}(z) \quad (\text{selon (6.4)}) \\
&= F_3(X, y, z) \Big|_{X=0}^x + F_3(0, Y, z) \Big|_{Y=0}^y + \frac{\partial \chi}{\partial z}(z).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial \chi}{\partial z}(z) = F_3(x, y, z) - F_3(X, y, z) \Big|_{X=0}^x - F_3(0, Y, z) \Big|_{Y=0}^y = F_3(0, 0, z).$$

On peut donc choisir

$$\chi(z) = \int_0^z F_3(0, 0, Z) dZ + C$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$.

En résumé, on a trouvé que

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x F_1(X, y, z) dX + \int_0^y F_2(0, Y, z) dZ + \int_0^z F_3(0, 0, Z) dZ + C$$

est un potentiel pour \mathbf{F} . □

Plus tard, lorsqu'on abordera le théorème de Stokes, on pourra donner une autre preuve du Théorème 6.5.2. Voir la Remarque 8.4.9.

Avertissement 6.5.3. Il est crucial dans le Théorème 6.5.2 que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sur *tout* \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . On a vu dans les Exemples 5.3.6 et 6.4.4 un exemple d'un champ vectoriel défini et irrotationnel sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mais qui n'est pas conservatif.

Remarque 6.5.4. En fait, on peut généraliser légèrement l'équation Théorème 6.5.1. On peut remplacer \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 par toute région qui est **simplement connexe**. Intuitivement, une région est simplement connexe si toute courbe fermée peut être contractée en un point. La région $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas simplement connexe puisque les courbes fermées autour de l'origine ne peuvent pas être contractées en un point.

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §2.4]: Q1–Q38.

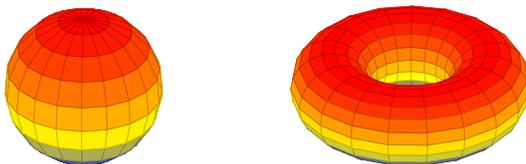
Chapitre 7

Intégrales de surfaces

Dans ce chapitre, nous étudierons l'intégration de fonctions à valeurs réelles et de champs de vecteurs sur des surfaces. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYe, Ch. 3].

7.1 Surfaces paramétrées

Dans le Chapter 6, on a vu que pour intégrer le long de courbes il fallait les paramétriser. Il en va de même pour les surfaces. Un type de surface qu'on a vu est le graphe d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables. Cependant, si on ne considérait que les graphes, on ne serait pas en mesure de traiter de nombreuses surfaces importantes, comme les sphères et les tores.



Définition 7.1.1 (Surface paramétrée). Une *paramétrisation d'une surface* est une fonction

$$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

La *surface* correspondant à la fonction Φ est son image $S = \Phi(D)$. On peut écrire

$$\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)).$$

Si Φ est différentiable ou est de classe C^1 , on appellera S une *surface différentiable* ou une *surface de C^1* , respectivement.

En général, on exigera qu'une paramétrisation soit injective, sauf peut-être sur une réunion finie de courbes.

Exemple 7.1.2 (Graphes). Si $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, avec $D \subseteq \mathbb{R}^2$, alors

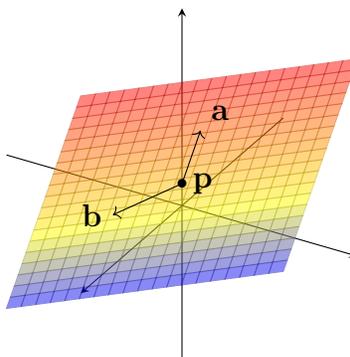
$$\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

est une paramétrisation du graphe de g . △

Exemple 7.1.3 (Planes). Soit P un plan parallèle aux deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} et passant par le point \mathbf{p} . Alors

$$\Phi(u, v) = \mathbf{p} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

est une paramétrisation de P .



△

Exemple 7.1.4 (Sphère). En utilisant les coordonnées sphériques (voir Section 4.5), il est possible de paramétriser la sphère de rayon R centrée à l'origine par

$$\Phi(u, v) = (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]. \quad \triangle$$

Exemple 7.1.5 (Tore). Le tore, obtenu en faisant tourner un cercle de rayon r dans le plan yz et centré à $(0, R, 0)$ autour de l'axe z , peut être paramétrisé par

$$\Phi(\theta, \psi) = ((R + r \cos \theta) \cos \psi, (R + r \cos \theta) \sin \psi, r \sin \theta), \quad 0 \leq \theta, \psi \leq 2\pi.$$

Voir [FRYe, Exemple 3.1.5] pour plus de détails. △

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §3.1]: Q1–Q7.

7.2 Plans tangents

On a discuté les plans tangents aux graphes dans la Section 1.4. Examinons maintenant le cas plus général des plans tangents aux surfaces.

Supposons que nous ayons une surface paramétrisée par

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Définissez

$$\Phi_u := \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \right), \quad \Phi_v := \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \right).$$

Alors $\Phi_u(u_0, v_0)$ et $\Phi_v(u_0, v_0)$ sont tangents à la surface en $\Phi(u_0, v_0)$. Ainsi, s'ils sont linéairement indépendants, ils engendrent le plan tangent. En d'autres termes, le plan tangent à la surface au point $\Phi(u_0, v_0)$ est donné par

$$\Phi(u_0, v_0) + s\Phi_u(u_0, v_0) + t\Phi_v(u_0, v_0), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

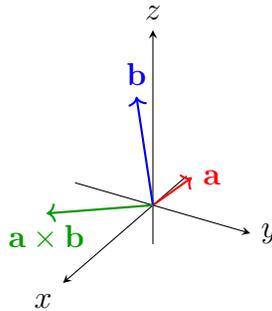
Rappelons que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, alors leurs *produit vectoriel*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

est un vecteur perpendiculaire à la fois à \mathbf{a} et à \mathbf{b} (la direction étant donnée par la règle de la main droite) et de magnitude

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta,$$

où θ est l'angle entre \mathbf{a} et \mathbf{b} .



Il s'ensuit que

$$\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$$

est un vecteur normal à la surface paramétrisée par Φ au point $\Phi(u_0, v_0)$, c'est-à-dire qu'il est orthogonal au plan tangent à ce point. Ce vecteur est non nul précisément lorsque $\Phi_u(u_0, v_0)$ et $\Phi_v(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendants.

Définition 7.2.1 (Point régulier). On dit qu'une surface S paramétrisée par Φ est *régulière* en $\Phi(u_0, v_0) \in S$ lorsque $\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$.

Exemple 7.2.2. Trouvons le plan tangent au *helicôïde* paramétrisé par

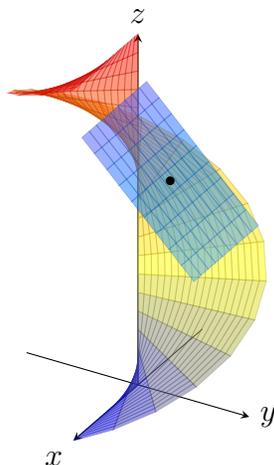
$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$$

au point $\Phi(1, \pi)$. On a

$$\begin{aligned}\Phi_r(r, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), & \Phi_r(1, \pi) &= (-1, 0, 0), \\ \Phi_\theta(r, \theta) &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1), & \Phi_\theta(1, \pi) &= (0, -1, 1),\end{aligned}$$

et $\Phi(1, \pi) = (-1, 0, \pi)$. Par conséquent, le plan tangent est donné par

$$(-1, 0, \pi) + s(-1, 0, 0) + t(0, -1, 1) = (-1 - s, -t, \pi + t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$



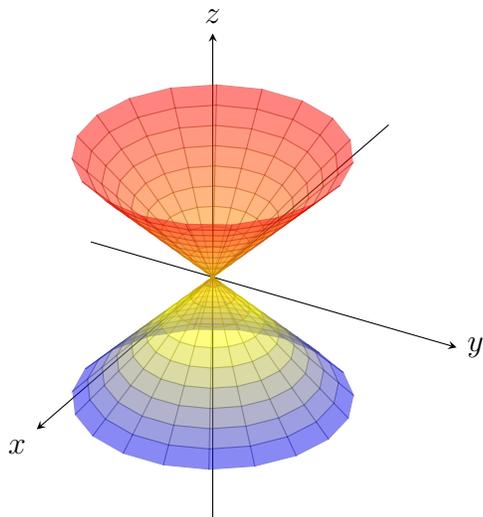
Notez aussi que

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, r). \quad (7.1)$$

Ce vecteur n'est jamais égal à $\mathbf{0}$ (puisque $\sin \theta$ et $\cos \theta$ ne s'annulent jamais pour la même valeur de θ) et donc l'hélicoïde est régulier en tout point. \triangle

Exemple 7.2.3. Considérez le cône paramétrisé par

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r).$$



On a

$$\Phi_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \quad \Phi_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

Alors

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r).$$

Le cône est donc régulier partout sauf à l'origine (lorsque $r = 0$).

△

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §3.2]: Q1–Q17.

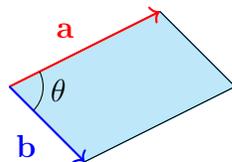
7.3 Aire de surfaces

Le premier type d'intégrale de surface que l'on considère est le calcul de l'aire de la surface. Dans la suite de ce chapitre, nous nous baserons sur l'hypothèse suivante.

Hypothèse 7.3.1. On suppose que toutes les surfaces sont des unions d'images de surfaces paramétrisées $\Phi_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ pour lesquelles :

- (a) D_i est une région élémentaire du plan,
- (b) Φ_i est de classe C^1 et est injective, sauf éventuellement sur la frontière de D_i , et
- (c) l'image de Φ_i est régulière, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

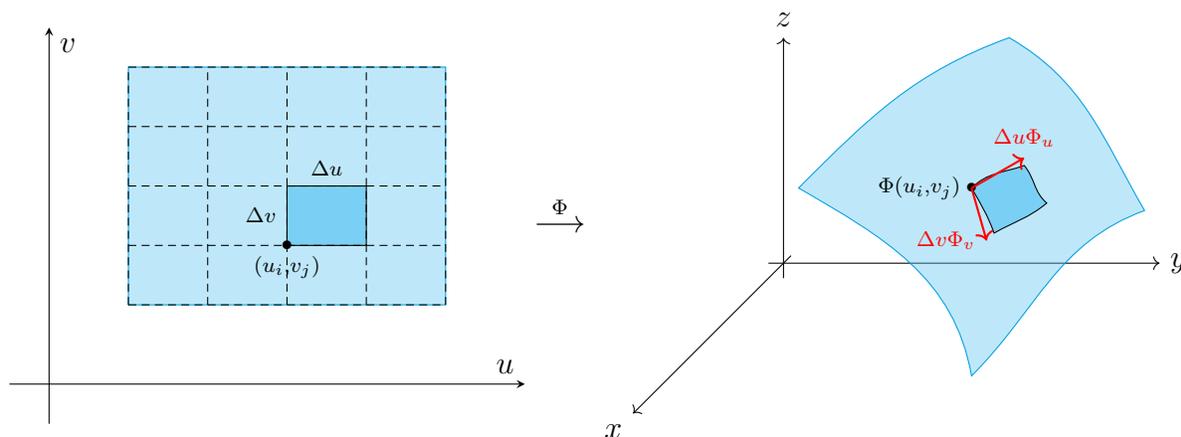
Dans ce qui suit, on utilisera le fait que $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ est l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .



$$\text{Aire} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|. \quad (7.2)$$

Avant de définir les intégrales générales de fonctions scalaires sur des surfaces, commençons par définir l'aire d'une surface. Pour simplifier, supposons que D est un rectangle. Comme dans la Section 3.3, on subdivise le rectangle D en divisant chacun de ses côtés en

n segments de longueurs égales.



Le sous-rectangle dont le coin inférieur droit est situé à (u_i, v_j) est envoyé à un morceau de la surface incluant le point $\Phi(u_i, v_j)$. On approche l'aire de ce morceau de la surface par celle du parallélogramme déterminé par les vecteurs $\Delta u \Phi_u(u_i, v_j)$ et $\Delta v \Phi_v(u_i, v_j)$. L'aire de ce parallélogramme est

$$\|\Delta u \Phi_u(u_i, v_j) \times \Delta v \Phi_v(u_i, v_j)\| = \|\Phi_u(u_i, v_j) \times \Phi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v. \quad (7.3)$$

En additionnant les aires de tous ces parallélogrammes, notre approximation de l'aire de la surface est la suivante

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\Phi_u(u_i, v_j) \times \Phi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v. \quad (7.4)$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, ces sommes devraient converger vers l'aire de la surface. Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 7.3.2 (Aire d'une surface paramétrée). L'aire de la surface S paramétrisée par $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est

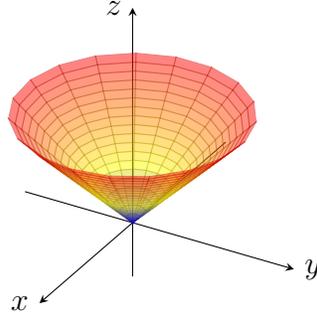
$$\text{Aire}(S) := \iint_D \|\Phi_u \times \Phi_v\| dA. \quad (7.5)$$

Si S est une réunion de surfaces S_i , alors son aire est la somme des aires des S_i .

Notez que notre définition de l'aire d'une surface fait intervenir la paramétrisation de S . On verra dans le Théorème 7.7.2 qu'en fait, elle est indépendante de cette paramétrisation. On a déjà vu un tel phénomène se produire pour les intégrales curvilignes dans le Théorème 6.3.1.

Exemple 7.3.3 (Aire d'un cône). Calculez l'aire du cône paramétrisé par

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



Comme nous l'avons calculé dans l'Exemple 7.2.3,

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r)$$

et $(0, 0, 0)$ est le seul point où la surface n'est pas régulière. De plus, Φ est injective à l'intérieur de son domaine $D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Puisque D est une région élémentaire, l'Hypothèse 7.3.1 est satisfaite. On a

$$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + r^2} = \sqrt{2}r.$$

Ainsi, l'aire du cône est

$$\iint_D \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r \, dr \, d\theta = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^1 = \sqrt{2}\pi. \quad \triangle$$

Exemple 7.3.4. Calculons l'aire de l'hélicoïde (voir l'Exemple 7.2.2) paramétrisé par

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

On a

$$\Phi_r(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \Phi_\theta(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1),$$

et donc

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, r).$$

Puisque $\Phi_r \times \Phi_\theta$ n'est jamais $\mathbf{0}$ (puisque $\sin \theta$ et $\cos \theta$ ne s'annulent jamais pour la même valeur de θ), la surface est régulière en tout point. Le domaine $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ est une région élémentaire et Φ est injective. Ainsi, l'Hypothèse 7.3.1 est satisfaite. On a

$$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + r^2} = \sqrt{r^2 + 1}.$$

Ainsi, à l'aide d'une table d'intégrales, on peut montrer que l'aire de cette surface est égale

$$\iint_D \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta = \pi \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right). \quad \triangle$$

Exemple 7.3.5 (Graphes). On rappelle, d'après l'Exemple 7.1.2, que si $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction avec $D \subseteq \mathbb{R}^2$, alors

$$\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D,$$

est une paramétrisation du graphe de f . On a alors

$$\Phi_x(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right) \quad \text{and} \quad \Phi_y(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right),$$

et donc

$$\Phi_x \times \Phi_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right),$$

qui ne s'annule jamais. Ainsi, à condition que D soit une région élémentaire et que f soit C^1 , l'Hypothèse 7.3.1 est satisfaite. Par conséquent, l'aire du graphe est

$$\text{Aire}(\text{graphe de } g) = \iint_D \left(\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dx dy. \quad (7.6)$$

△

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §3.3]: Q1–Q3, Q5–Q10, Q14

7.4 Intégrales de fonctions scalaires sur des surfaces

À la Section 7.3, on a vu comment calculer l'aire d'une surface. Supposons maintenant que la surface soit une feuille mince dont la densité au point (x, y, z) est donnée par une fonction continue $f(x, y, z)$. Nous voulons maintenant calculer la *masse* de cette surface. Dans ce cas, on doit multiplier l'aire du parallélogramme donnée dans (7.3) par la densité $f(\Phi(u_i^*, v_j^*))$ pour un point (u_i^*, v_j^*) dans le sous-réctangle dont le coin inférieur droit est situé à (u_i, v_j) . Cela donne une approximation de la masse de l'image de ce rectangle sous la paramétrisation $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$. En additionnant ces approximations, notre approximation de la masse de la surface est la suivante

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\Phi(u_i^*, v_j^*)) \|\Phi_u(u_i, v_j) \times \Phi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v.$$

Comparez à (7.4). Lorsque $n \rightarrow \infty$, ces sommes devraient converger vers la masse de la surface. Cela nous amène à la définition suivante, qui s'applique de manière plus générale (c'est-à-dire pas seulement lorsque la fonction $f(x, y, z)$ représente une densité).

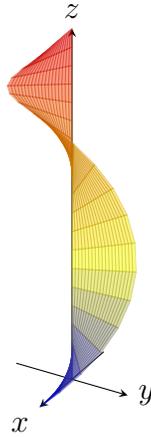
Définition 7.4.1 (Intégrales d'une fonction scalaire sur une surface). Si $f(x, y, z)$ est une fonction continue à valeur réelle définie sur une surface paramétrisée par $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ et qui satisfait l'Hypothèse 7.3.1, on définit l'intégrale de f sur Φ par

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS = \iint_{\Phi} f dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| dA. \quad (7.7)$$

Notez que lorsque $f(x, y, z) = 1$, (7.7) se réduit à la formule (7.5) de l'aire de surface, comme prévu.

Exemple 7.4.2. Considérez l'hélicoïde S de l'Exemple 7.2.2 paramétrisé par

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad (r, \theta) \in D = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$



Calculez

$$\iint_{\Phi} f dA, \quad \text{où } f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On a trouvé dans (7.1) que

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r).$$

Alors

$$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + r^2} = \sqrt{1 + r^2}.$$

On a aussi

$$f(\Phi(u, v)) = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \sqrt{r^2} = r \quad \text{since } r \geq 0.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \iint_D r \sqrt{1 + r^2} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 + r^2} d\theta dr \\ &= \int_0^1 2\pi r \sqrt{1 + r^2} dr. \end{aligned}$$

Effectuons maintenant la substitution

$$u = 1 + r^2, \quad du = 2r \, dr.$$

Donc

$$\iint_{\Phi} \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = \int_1^2 \pi \sqrt{u} \, du = \left[\frac{2\pi}{3} u^{3/2} \right]_{u=1}^2 = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \quad \triangle$$

Exemple 7.4.3 (Graphes). Dans l'Exemple 7.3.5, on a développé une formule pour l'aire de la surface d'un graphe (qui est un type spécial de surface). En reprenant les mêmes arguments, mais pour l'intégrale d'une fonction $f(x, y, z)$ sur le graphe, on peut donner une formule pour l'intégrale d'une fonction scalaire sur un graphe. Supposons que

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

est une fonction C^1 et que D est une région élémentaire. Considérons le graphe de g avec une paramétrisation

$$\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

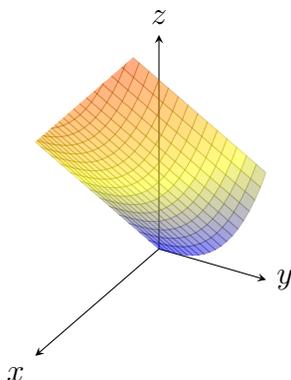
Alors l'intégrale d'une fonction continue f sur Φ est

$$\iint_D f(x, y, g(x, y)) \left(\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + 1} \right) dx \, dy. \quad (7.8)$$

Notez que, lorsque $f(x, y, z) = 1$, (7.8) se réduit à (7.6). △

Exemple 7.4.4. Intégrons y^3 sur la surface définie par

$$z = x + y^3, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1.$$



Notez que cette surface est le graphe de la fonction

$$g(x, y) = x + y^3.$$

Donc, (7.8) implique que

$$\iint_{\Phi} y^3 \, dS = \iint_D y^3 \left(\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + 1} \right) dA$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^3 y^3 \sqrt{1 + 9y^4 + 1} \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 3y^3 \sqrt{1 + 9y^4 + 1} \, dy \\
&= \int_2^{11} \frac{1}{12} \sqrt{u} \, du && (u = 9y^4 + 2, \, du = 36y^3 \, dy) \\
&= \left[\frac{1}{18} u^{3/2} \right]_{u=2}^{u=11} = \frac{1}{18} (11^{3/2} - 2^{3/2}). && \triangle
\end{aligned}$$

Notez que la Définition 7.4.1 dépend du choix de la paramétrisation de la surface. Plus tard, dans la Section 7.7, on verra qu'en fait, l'intégrale ne dépend pas de la paramétrisation.

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §3.3]: Q11, Q15, Q20, Q25, Q26, Q32, Q34

7.5 Centre de masse et moment d'inertie

Dans cette section, on discutera brièvement de quelques applications de l'intégration en dimensions supérieures en physique.

Définition 7.5.1 (Centre de masse). Supposons qu'un objet occupe un volume $V \subseteq \mathbb{R}^3$, et que sa densité au point (x, y, z) est donnée par $\rho(x, y, z)$. Le *centre de masse* de cet objet est (x_0, y_0, z_0) , où

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V x \rho(x, y, z) \, dV, \\
y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V y \rho(x, y, z) \, dV, \\
z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(x, y, z) \, dV,
\end{aligned}$$

et

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dV$$

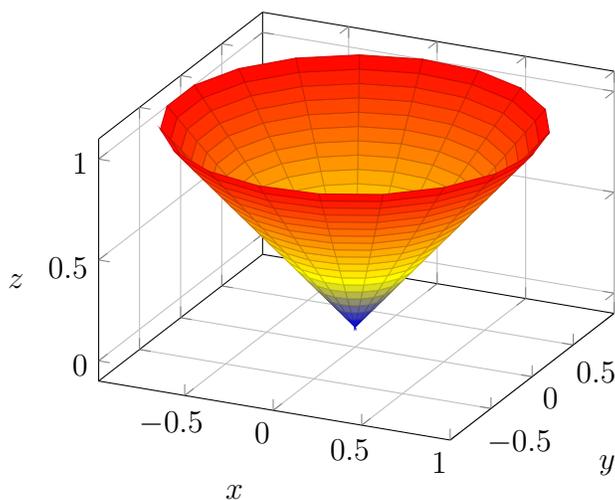
est la masse totale de l'objet. Si l'objet est unidimensionnel ou bidimensionnel, on remplace les intégrales ci-dessus par des intégrales curvilignes ou de surfaces, respectivement. Si la densité de l'objet n'est pas donnée, on suppose qu'elle est constante $\rho(x, y, z) = 1$.

Exemple 7.5.2. Considérez le cône plein

$$V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$$

et sa surface

$$S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$



Si les deux ont une densité constante égale à 1, lequel est le plus stable ? Plus précisément, lequel a un centre de masse plus bas ?

Considérons d'abord le cône plein. En utilisant les coordonnées cylindriques, on peut calculer que sa masse est

$$\begin{aligned} M_V &= \iiint_V dV = \int_0^1 \int_0^z \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr \, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz = 2\pi \left[\frac{z^3}{6} \right]_{z=0}^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} \iiint_V z \, dV &= \int_0^1 \int_0^z \int_0^{2\pi} zr \, d\theta \, dr \, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{zr^2}{2} \right]_{r=0}^z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{z^3}{2} dz = 2\pi \left[\frac{z^4}{8} \right]_{z=0}^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$z_0 = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Par symétrie, on a $x_0 = y_0 = 0$. Ainsi, le centre de masse du cône plein est $(0, 0, \frac{3}{4})$.

Considérons maintenant le cône vide. Notre calcul de la surface d'un cône dans l'Exemple 7.3.3 donne

$$M_S = \sqrt{2}\pi.$$

Comme dans l'Exemple 7.3.3, on paramétrise le cône par

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

et donc

$$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{2}r.$$

Ainsi,

$$\iint_S z \, dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{2}r \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2}r^2 \, dr = \left[\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} r^3 \right]_{r=0}^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Par conséquent, on obtient

$$z_0 = \frac{\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}}{\sqrt{2}\pi} = \frac{2}{3}.$$

Encore une fois, par symétrie, on a $x_0 = y_0 = 0$. Ainsi, le centre de masse est $(0, 0, \frac{2}{3})$. Le cône vide a donc un centre de masse plus bas que le cône plein. \triangle

Pour la définition suivante, on considère un objet en rotation autour d'un axe. L'axe est une ligne dans \mathbb{R}^3 . Le moment d'inertie autour de cet axe mesure le couple nécessaire par unité d'accélération angulaire. C'est l'analogie rotatif de l'inertie habituelle.

Définition 7.5.3 (Moment d'inertie). Supposons qu'un objet occupe un volume $V \subseteq \mathbb{R}^3$, et que sa densité au point (x, y, z) est donnée par $\rho(x, y, z)$. On fixe un axe, et on note $d(x, y, z)$ la distance entre le point (x, y, z) et cet axe. Alors le *moment d'inertie* de l'objet autour de cet axe est

$$\iiint_V \rho(x, y, z) d(x, y, z)^2 \, dV.$$

Si l'objet est unidimensionnel ou bidimensionnel, on remplace les intégrales ci-dessus par des intégrales curvilignes ou de surfaces, respectivement. Si la densité de l'objet n'est pas donnée, on suppose qu'elle est constante et est $\rho(x, y, z) = 1$.

Exemple 7.5.4. Considérez le cube

$$V = [0, 1]^3$$

avec une densité

$$\rho(x, y, z) = x.$$

Son moment d'inertie autour de l'axe des x est de

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho(x, y, z) d(x, y, z)^2 \, dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} (y^2 + z^2) \right]_{x=0}^1 \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (y^2 + z^2) \, dy \, dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{y=0}^1 dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + z^2 \right) dz \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{z}{3} + \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^1 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \quad \triangle
\end{aligned}$$

Exemple 7.5.5. Considérons la demi-sphère

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

avec une densité

$$\rho(x, y, z) = z.$$

Trouvons son moment d'inertie autour de l'axe z . Comme dans l'Exemple 7.7.1, on paramétrise cette surface par

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi\| &= \|(-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, -\sin \varphi \cos \varphi)\| \\
&= \sqrt{\cos^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\
&= \sqrt{\sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \sqrt{\sin^2 \varphi} = \sin \varphi,
\end{aligned}$$

car $\sin \varphi \geq 0$ pour $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Le moment d'inertie autour de l'axe des z est alors égal à

$$\begin{aligned}
\iint_S z(x^2 + y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin^3 \varphi d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} \sin^4 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}. \quad \triangle
\end{aligned}$$

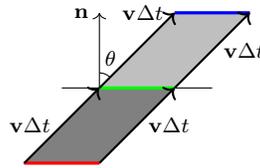
Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §3.3]: Q4, Q13, Q21, Q22, Q27,

7.6 Intégrales de surfaces de champs vectoriels

Dans la Section 7.4, on a développé la notion d'intégrale d'une fonction *scalaire* sur une surface. On veut maintenant définir l'intégrale d'un champ *vectoriel* sur une surface. Ceci est analogue aux deux types d'intégrales le long des courbes. La Définition 6.2.1 a été motivé par le notion du *travail* ; voir la Définition 6.2.3. Notre définition des intégrales de surface des champs vectoriels s'inspirera de la notion physique de *flux*. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYe, §3.4].

Si notre champ vectoriel $\mathbf{v}(x, y, z)$ désigne la vitesse d'un fluide, $\rho(x, y, z)$ est la densité du fluide, et que nous plaçons une surface imaginaire dans ce fluide, on peut se demander : « à quelle vitesse le fluide traverse-t-il la surface » ? Soit \mathbf{n} le vecteur normal unitaire à un petit morceau de cette surface, d'aire ΔS . On trace une section transversale comme suit :



La ligne verte est une vue latérale du morceau ΔS de la surface. Dans un petit intervalle de temps Δt ,

- la ligne rouge se déplace vers la ligne verte et
- la ligne verte se déplace vers la ligne bleue, de sorte que
- le fluide remplissant la région en gris foncé sous la ligne verte passe par ΔS et se déplace vers la région en gris clair au-dessus de la ligne verte.

Si l'on désigne par θ l'angle entre \mathbf{n} et \mathbf{v} , la région en gris foncé a pour base ΔS et pour hauteur $\|\mathbf{v}\Delta t\| \cos \theta$. Ainsi, son volume est

$$\|\mathbf{v}(x, y, z)\Delta t\| \cos \theta \Delta S = \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \Delta t \Delta S,$$

car $\mathbf{n}(x, y, z)$ est de longueur 1. La masse du fluide qui traverse ΔS durant l'intervalle de temps Δt est alors

$$\rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \Delta t \Delta S$$

et la vitesse à laquelle le fluide traverse ΔS est égale à

$$\rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \Delta S.$$

En additionnant ces quantités pour tous les morceaux ΔS de la surface, puis en prenant la limite lorsque la taille des morceaux ΔS et l'intervalle de temps Δt tendent vers zéro, on trouve que la vitesse avec laquelle le fluide traverse la surface S est l'intégrale du flux

$$\iint_S \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) dS.$$

En comparant en suite avec (7.7), on voit que pour calculer cette intégrale, on doit paramétriser la surface par une fonction $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$. On remplace alors dS par $\|\Phi_u \times \Phi_v\| dA$, et on intègre sur D . Rappelons que le point $\Phi(u_0, v_0) \in S$ est *régulier* si $\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$. Puisque Φ_u et Φ_v sont tangents à la surface, leur produit vectoriel $\Phi_u \times \Phi_v$ est normal à cette surface. Par conséquent, de façon informelle, on a

$$\mathbf{n} dS = \Phi_u \times \Phi_v.$$

Ceci motive la définition suivante (en posant $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$).

Définition 7.6.1 (Intégrale d'un champ vectoriel sur une surface). Soit \mathbf{F} un champ de vecteurs défini sur l'image d'une surface paramétrée Φ . L'*intégrale de surface* ou *flux* de \mathbf{F} sur Φ est

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \iint_D \mathbf{F} \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) dA.$$

Notez que la Définition 7.6.1 dépend d'un choix de la paramétrisation de la surface. Plus tard, dans la Section 7.7, on verra que, à un signe près, l'intégrale ne dépend pas de la paramétrisation.

Exemple 7.6.2. Considérez le cylindre S paramétrisé par

$$\Phi: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

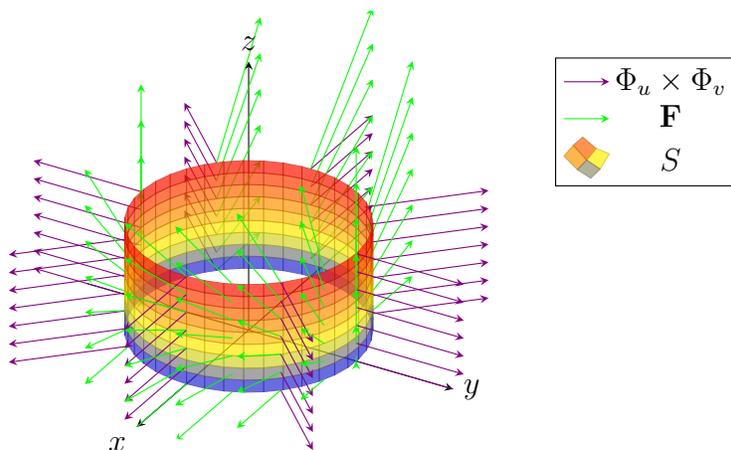
et le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, z).$$

On a

$$\Phi_u \times \Phi_v = (-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos u, \sin u, 0).$$

En traçant cette surface et ce champ de vecteurs, on obtient ce qui suit :



On a

$$\mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) = (\cos u, 0, v) \cdot (\cos u, \sin u, 0) = \cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)) \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2u)) \, du \\ &= \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_{u=0}^{2\pi} = \pi. \quad \triangle \end{aligned}$$

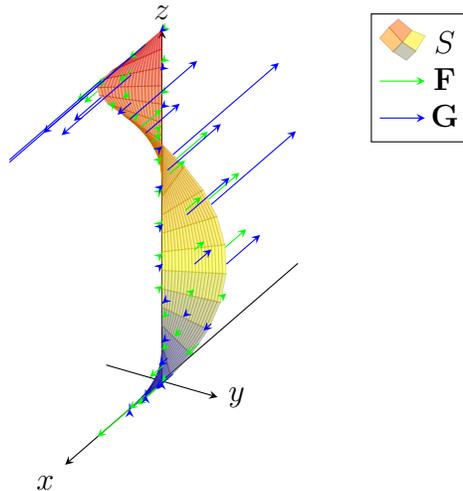
Exemple 7.6.3. Rappelez-vous l'hélicoïde S des exemples 7.2.2 et 7.4.2, avec la paramétrisation

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \leq 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Intégrons les champs de vecteurs suivants sur Φ :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (xz, 0, 0).$$

On a donc la figure suivante :



En premier on calcule

$$\begin{aligned} \Phi_r \times \Phi_\theta &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \times (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1) \\ &= (\sin \theta, -\cos \theta, r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, r). \end{aligned}$$

Comme

$$\mathbf{F}(\Phi(r, \theta)) \cdot (\Phi_r \times \Phi_\theta) = (r \cos \theta, 0, 0) \cdot (\sin \theta, -\cos \theta, r) = r \cos \theta \sin \theta = \frac{r}{2} \sin(2\theta),$$

on a

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{2} \sin(2\theta) \, d\theta \, dr = \int_0^1 \left[-\frac{r}{4} \cos(2\theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi} \, dr = \int_0^1 0 \, dr = 0.$$

D'une autre part,

$$\mathbf{G}(\Phi(r, \theta)) \cdot (\Phi_r \times \Phi_\theta) = (r\theta \cos \theta, 0, 0) \cdot (\sin \theta, -\cos \theta, r) = r\theta \cos \theta \sin \theta = \frac{r\theta}{2} \sin(2\theta),$$

et donc

$$\iint_{\Phi} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r\theta}{2} \sin(2\theta) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2\theta}{4} \sin(2\theta) \right]_{r=0}^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \theta \sin(2\theta) d\theta.$$

On évalue la dernière intégrale en utilisant une intégration par parties avec

$$\begin{aligned} u &= \theta, & dv &= \sin(2\theta) d\theta, \\ du &= d\theta, & v &= -\frac{1}{2} \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Donc

$$\int \theta \sin(2\theta) d\theta = -\frac{1}{2} \theta \cos(2\theta) - \int -\frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta = -\frac{1}{2} \theta \cos(2\theta) + \frac{1}{4} \sin(2\theta).$$

Ainsi

$$\iint_{\Phi} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} \theta \cos(2\theta) + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{1}{4} ((-\pi + 0) - (0 + 0)) = -\frac{\pi}{4}. \quad \triangle$$

Exemple 7.6.4 (Graphes). Rappelez-vous, de l'Exemple 7.3.5, que si $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, avec $D \subseteq \mathbb{R}^2$, alors

$$\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in D,$$

est une paramétrisation du graphe de g et on a

$$\Phi_x \times \Phi_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right).$$

Par conséquent, l'intégrale d'un champ de vecteurs $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ sur le graphe est donnée par

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-F_1 \frac{\partial g}{\partial x} - F_2 \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \right) dx dy. \quad \triangle$$

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §3.3]: Q16, Q23, Q24, Q28–Q31, Q33, Q35–Q37

7.7 Reparamétrisation et orientation

Dans la Section 6.3, on a étudié l'effet de la reparamétrisation sur les intégrales curvilignes. En particulier, on a vu qu'une intégrale curviligne est indépendante de la paramétrisation à condition de fixer une orientation de la courbe sur laquelle on intègre. Ceci nous a permis de définir, dans la (6.3), une intégrale sur une courbe orientée. On veut maintenant refaire ceci pour les intégrales de surface.

Supposons que

$$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Psi: E \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sont deux paramétrisations de la même surface S . En d'autres termes, Φ, Ψ sont des fonctions injectives de C^1 avec $\Phi(D) = \Phi(E) = S$. On choisit un point $(x, y, z) \in S$. Alors il existe d'uniques

$$(u, v) \in D \text{ tel que } \Phi(u, v) = (x, y, z) \quad \text{and} \quad (s, t) \in E \text{ tel que } \Psi(s, t) = (x, y, z).$$

On dit que Φ et Ψ ont la *même orientation* en (x, y, z) si

$$\Phi_u \times \Phi_v \quad \text{et} \quad \Psi_s \times \Psi_t$$

sont des multiples par scalaires positifs l'un de l'autre. On dit qu'elles ont une *orientation opposée* en (x, y, z) si elles sont des multiples par scalaires négatifs l'un de l'autre. (Puisque $\Phi_u \times \Phi_v$ et $\Psi_s \times \Psi_t$ sont tous deux normaux à S , ce sont les seules possibilités, à condition que les deux vecteurs soient non nuls). On dit que Φ et Ψ ont la même orientation (respectivement, orientation opposée) si elles ont la même orientation (respectivement, orientation opposée) en tout point de S .

Exemple 7.7.1. Considérez la demi-sphère

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

avec les paramétrisations suivantes

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \varphi) &= (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), & \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \Psi(u, v) &= (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}), & (u, v) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

(Notez que Φ n'est pas injective telle qu'elle est donnée. Pour résoudre ce problème, on pourrait modifier le domaine et prendre $([0, 2\pi] \times]0, \frac{\pi}{2}] \cup \{(0, 0)\}$.) Calculons alors

$$\begin{aligned} \Phi_\theta \times \Phi_\varphi &= (-\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, 0) \times (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi) \\ &= (-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, -\sin \varphi \cos \varphi), \\ \Psi_u \times \Psi_v &= \left(1, 0, \frac{-2u}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right) \times \left(0, 1, \frac{-2v}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right) \\ &= \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 1\right). \end{aligned}$$

(Notez que $\Phi_u \times \Phi_v$ n'est pas défini sur la frontière $u^2 + v^2 = 1$ de son domaine). Pour $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $-\sin \varphi \cos \varphi < 0$. Donc la coordonnée z de $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$ est négative, tandis que la coordonnée z de $\Psi_u \times \Psi_v$ est positive. Ainsi, Φ et Ψ ont des orientations opposées.

Pour mieux illustrer cela, prenons un point spécifique, disons

$$\Psi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

A ce stade, les vecteurs normaux issus des deux paramétrisations sont

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right). \quad \text{and} \quad \Psi_u \times \Psi_v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (1, 0, 1).$$

Donc $\Psi_u \times \Psi_v = -2\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$ en ce point. Les orientations sont donc opposées. \triangle

On est maintenant prêt à énoncer notre théorème principal de cette section.

Théorème 7.7.2. *Supposons que Φ, Ψ sont deux paramétrisations injectives de C^1 de la même surface S . Soit \mathbf{F} un champ vectoriel défini sur S et soit f une fonction à valeur réelle aussi définie sur S .*

(a) *Si Φ et Ψ ont la même orientation, alors*

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Psi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

(b) *Si Φ et Ψ ont des orientations opposées, alors*

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{\Psi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

(c) *On a*

$$\iint_{\Phi} f dS = \iint_{\Psi} f dS.$$

Proof. La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 6.3.1. Elle nécessite l'utilisation d'un changement de variables. Nous omettons donc les détails. \square

Le Théorème 7.7.2 indique que les intégrales de fonctions scalaires sur des surfaces sont indépendantes de la paramétrisation, tandis que les intégrales de champs vectoriels sur des surfaces ne dépendent que de l'orientation de la paramétrisation. Ceci est analogue aux Théorème 6.3.1 et Théorème 6.3.2, qui affirment que les intégrales curvilignes de fonctions scalaires sont indépendantes de la paramétrisation, tandis que les intégrales curvilignes de champs vectoriels ne dépendent que de l'orientation de la paramétrisation.

À la lumière du Théorème 7.7.2, si f est une fonction à valeur réelle définie sur une surface S , on peut définir

$$\iint_S f dS := \iint_{\Phi} f dS,$$

où Φ est une paramétrisation régulière *quelconque* de S .

Pour les champs de vecteurs, il faut spécifier une orientation. Une *surface orientée* est une surface à deux côtés dont un côté est spécifié comme étant l'*extérieur* ou le *côté positif*.

On appelle l'autre côté l'*intérieur* ou *côté négatif*. On dit que $\Phi(u, v)$ est une paramétrisation de la surface orientée S si $\Phi(u, v)$ est une paramétrisation de S et $\Phi_u \times \Phi_v$ pointe loin du côté positif de S pour tout (u, v) dans le domaine de Φ . Ensuite, pour un champ de vecteurs \mathbf{F} défini sur une surface *orientée* S , on peut définir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

où Φ est une paramétrisation régulière quelconque de la surface orientée S .

Exemple 7.7.3. Supposons qu'on choisisse d'orienter la demi-sphère S de l'Exemple 7.7.1 vers le haut. En d'autres termes, nous voulons que nos vecteurs normaux aient une coordonnée z positive. Considérons le champ vectoriel $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Comme nous l'avons noté dans l'Exemple 7.7.1, la paramétrisation Ψ donne des vecteurs normaux avec une coordonnée z positive. Ainsi, Ψ est une paramétrisation de la surface orientée S . Par conséquent,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Psi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Psi} (0, 0, 1) \cdot (\Psi_u \times \Psi_v) dS = \iint_D 1 du dv = \text{Aire}(D) = \pi,$$

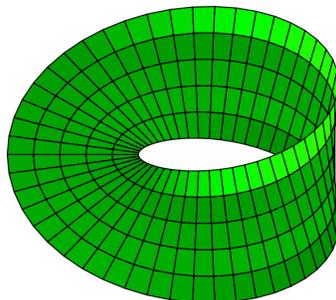
où $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le domaine de Ψ . D'autre part

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Phi} (0, 0, 1) \cdot (\Phi_\theta \times \Phi_\varphi) dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (-\sin \varphi \cos \varphi) d\theta d\varphi \\ &= -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = -2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} = -\pi, \end{aligned}$$

qui est $-\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ puisque l'orientation de Φ est opposée à celle de S . △

Si un champ de vecteurs \mathbf{F} représente le flux d'un fluide, le signe d'une intégrale de surface indique le flux par rapport à l'orientation de la surface. En d'autres termes, si $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ est positive, alors il existe un flux net à travers S dans la direction de l'orientation de S . Par contre, si $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ est négative, alors le flux net est dans la direction opposée.

Notez que certaines surfaces *ne peuvent pas* être orientées. En d'autres termes, il existe des surfaces pour lesquelles il n'est pas possible de choisir un côté. L'exemple le plus célèbre est le ruban de Möbius, qui n'a qu'un seul côté.



Source de l'image: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Green_Coloured_Mobius_Strip.png
(CC BY-SA 3.0)

L'intégration d'un champ de vecteurs sur le ruban de Möbius est problématique ! Pour une discussion plus approfondie sur l'orientation, voir [FRYe, §3.5].

Chapitre 8

Théorèmes d'intégration

Dans ce chapitre, on abordera trois théorèmes : le théorème de la divergence, le théorème de Green et le théorème de Stokes. Ils sont tous des généralisations du théorème fondamental du calcul intégral. Rappelez-vous que le théorème fondamental du calcul affirme que

$$\int_a^b \frac{df}{dt}(t) dt = f(b) - f(a).$$

Ainsi, il relie l'intégrale de la dérivée d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ aux valeurs de cette fonction sur la frontière $\{a, b\}$ de cet intervalle. Le théorème de la divergence, le théorème de Green et le théorème de Stokes se présentent également sous cette forme. Cependant, on travaillera désormais dans des dimensions supérieures. Pour le théorème de divergence, l'intégrale du côté gauche est sur un volume tridimensionnel, et le côté droit est une intégrale sur la frontière de ce volume, qui est une surface. Pour le théorème de Green et le théorème de Stokes, l'intégrale du côté gauche est sur une surface, et le côté droit est une intégrale sur la frontière de cette surface, qui est une courbe. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYe, Ch. 4].

8.1 Gradient, divergence et rotationnel.

On commence par une discussion sur le gradient, la divergence et le rotationnel. On a déjà étudié le gradient et le rotationnel, mais la divergence est une nouveauté. La meilleure façon de se souvenir de ces opérateurs est d'utiliser le symbole *nabla* ∇ . Il s'agit d'un opérateur différentiel défini par

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dans cette section, \mathbf{F} et \mathbf{G} désignent des champs vectoriels tridimensionnels et f, g, h des fonctions à valeurs réelles. On désigne les composantes du champ vectoriel \mathbf{F} par F_1, F_2, F_3 (et de même pour \mathbf{G} , etc...).

Définition 8.1.1 (Gradient, divergence, rotationnel et laplacien). .

(a) Le *gradient* d'une fonction à valeurs réelles $f(x, y, z)$ est le champ vectoriel

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

(b) La *divergence* d'un champ vectoriel $\mathbf{F}(x, y, z)$ est la fonction à valeurs réelles

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

(c) Le *rotationnel* d'un champ vectoriel $\mathbf{F}(x, y, z)$ est le champ vectoriel

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

(d) le *laplacien* d'une fonction à valeurs réelles $f(x, y, z)$ est la fonction à valeurs réelles

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

8.1.1 Identités vectorielles

Lorsqu'on travaille avec les opérateurs ci-dessus, il est utile d'avoir certaines identités à notre disposition. Certaines de ces identités impliquent l'expression $(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$ pour les champs vectoriels \mathbf{F}, \mathbf{G} . Cette expression est définie comme suit

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} := G_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}.$$

Les preuves de toutes ces identités font appel aux règles de différentiation que vous connaissez. Ainsi, pour chaque proposition, nous ne prouverons que quelques unes de ces identités, laissant la preuve des autres à titre d'exercice. Les preuves sont également disponibles dans [FRYe, §4.1.1].

Proposition 8.1.2 (Identités du gradient).

- (a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.
- (b) $\nabla(cf) = c\nabla f$ for all $c \in \mathbb{R}$.
- (c) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$.
- (d) $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$ aux points \mathbf{x} où $g(\mathbf{x}) \neq 0$.
- (e) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) - (\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$.

Proof. Pour montrer (c), on calcule

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= \mathbf{i} \frac{\partial fg}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial fg}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial fg}{\partial z} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z} \right) \quad (\text{chain rule}) \\ &= (\nabla f)g + f(\nabla g). \end{aligned}$$

Comme $\nabla c = \mathbf{0}$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\nabla(cf) = (\nabla c)f + c(\nabla f) = c\nabla f,$$

ce qui démontre (b). □

Proposition 8.1.3 (Identités de la divergence).

- (a) $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$.
- (b) $\nabla \cdot (c\mathbf{F}) = c\nabla \cdot \mathbf{F}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.
- (c) $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F}$.
- (d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

Proof. Pour montrer (c), on calcule

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{F}) &= \frac{\partial(fF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fF_3)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (\text{règle du produit}) \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F}. \end{aligned}$$

En prenant $f(x, y, z) = c$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$ et en utilisant le fait que $\nabla c = \mathbf{0}$ on obtient alors (b). \square

Proposition 8.1.4 (Identités du rotationnel).

- (a) $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$.
- (b) $\nabla \times (c\mathbf{F}) = c\nabla \times \mathbf{F}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.
- (c) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F}$.
- (d) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$.

Proof. Pour montrer (c), on utilise la règle de la composée pour calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial(fF_3)}{\partial y} - \frac{\partial(fF_2)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial y} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} F_2 - f \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial(fF_1)}{\partial z} - \frac{\partial(fF_3)}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} F_3 - f \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial(fF_2)}{\partial x} - \frac{\partial(fF_1)}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} F_1 - f \frac{\partial F_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} F_2 - f \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} F_3 - f \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} F_1 - f \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} F_3 - \frac{\partial f}{\partial z} F_2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} F_1 - \frac{\partial f}{\partial x} F_3 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} F_2 - \frac{\partial f}{\partial y} F_1 \right) \mathbf{k} \\ &\quad + f \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + f \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + f \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (\nabla f) \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$

En prenant $f(x, y, z) = c$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$ on obtient alors (b). \square

Proposition 8.1.5 (Identités du laplacien).

- (a) $\nabla^2(f + g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$.
- (b) $\nabla^2(cf) = c\nabla^2 f$ for all $c \in \mathbb{R}$.
- (c) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + g\nabla^2 f$.

Proof. Pour montrer (c), on calcule

$$\begin{aligned} \nabla^2(fg) &= \nabla \cdot \nabla(fg) \\ &= \nabla \cdot ((\nabla f)g + f(\nabla g)) && \text{(selon Proposition 8.1.2(c))} \\ &= \nabla \cdot ((\nabla f)g) + \nabla \cdot (f(\nabla g)) && \text{(selon Proposition 8.1.3(a))} \\ &= (\nabla^2 f)g + (\nabla f) \cdot (\nabla g) + (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\nabla^2 g, && \text{(selon Proposition 8.1.3(c))} \end{aligned}$$

comme voulu. □

Proposition 8.1.6 (Identités du deuxième degré). *Suppose \mathbf{F} and f, g, h are C^2 .*

- (a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.
- (b) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.
- (c) $\nabla \cdot (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h)$.
- (d) $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$.

Proof. On a démontré (b) dans le Théorème 5.3.3(b). □

Exemple 8.1.7. Soit $\mathbf{r}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ et soit $\psi(x, y, z)$ une fonction quelconque à valeurs réelles. Démontrons que

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = 0.$$

En utilisant la Proposition 8.1.3(d), on a

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi - \mathbf{r} \cdot (\nabla \times (\nabla \psi)) = (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi,$$

où on a utilisé la Proposition 8.1.6(b) pour conclure que $\nabla \times (\nabla \psi) = \mathbf{0}$. Ensuite, on calcule

$$\nabla \times \mathbf{r} = \left(\frac{\partial(z^3)}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(z^3)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Ainsi, $\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = 0$, comme voulu. En fait, ceci est vrai pour *tout* \mathbf{r} qui est irrotationnel. △

8.1.2 Interprétations physiques

Il est utile d'avoir une interprétation intuitive du gradient, de la divergence et du rotationnel. Une telle intuition nous aidera à comprendre certains des théorèmes et applications à venir. On a déjà vu dans la Proposition 1.8.6 que le gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ en un point \mathbf{x} pointe dans la direction dans laquelle f croît le plus rapidement en \mathbf{x} . Ensuite, la Proposition 1.8.4 indique que sa magnitude est le taux de changement dans cette direction.

Discutons maintenant la divergence. On fixe un point (x_0, y_0, z_0) . Alors, pour $\varepsilon > 0$, soit

$$S_\varepsilon = \{(x, y, z) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2\}$$

la sphère de rayon ε centrée à (x_0, y_0, z_0) . On peut alors montrer que, pour un champ vectoriel $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , on a

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(S_\varepsilon)} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

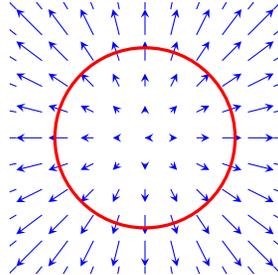
où $\text{Vol}(S_\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$ est le volume de S_ε . (Pour une preuve de ce fait, voir [FRYe, Lem. 4.1.20].) Si on interprète \mathbf{F} comme la vitesse d'un fluide quelconque, alors l'intégrale du flux $\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ représente le flux total à travers la surface. Ainsi,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

est la vitesse à laquelle le fluide sort d'une sphère infinitésimale, centrée à \mathbf{x} , par unité de temps et par unité de volume. C'est donc une mesure de la force de la « source » à \mathbf{x} .

Exemple 8.1.8. Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$



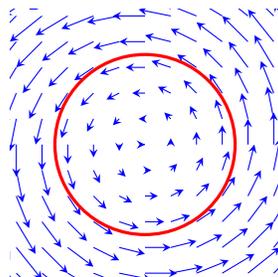
Si ce vecteur représente le flux du fluide, alors ce dernier est créé et poussé à travers une sphère centrée à l'origine. La divergence est

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3 > 0,$$

ce qui est cohérent avec notre interprétation intuitive. △

Exemple 8.1.9. Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$



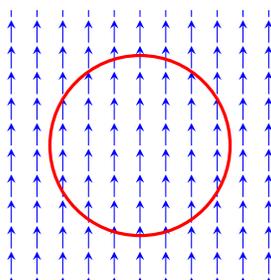
Dans ce cas, le fluide tourne en rond. Aucun fluide ne sort réellement de la sphère. La divergence est

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

ce qui est cohérent avec notre interprétation. \triangle

Exemple 8.1.10. Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j}.$$

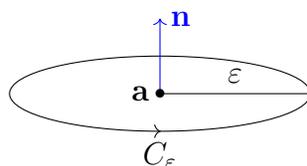


Dans ce cas, le fluide se déplace uniformément vers le haut. Le fluide entre dans la sphère par le bas et en sort par le haut exactement à la même vitesse. La vitesse nette à laquelle le fluide traverse la sphère est donc nulle. La divergence est

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

ce qui est cohérent avec notre interprétation. \triangle

Finalement, intéressons-nous au rotationnel. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{a}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$. Soit C_ε le cercle centré en \mathbf{a} , de rayon ε et situé dans le plan passant par \mathbf{a} et orthogonal à \mathbf{n} . On oriente C_ε en utilisant la règle de la main droite. Si le pouce de votre main droite pointe dans la direction de \mathbf{n} et que vous faites tourner vos doigts, ils pointent dans l'orientation de C_ε .



On peut alors montrer que

$$(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

où $\pi \varepsilon^2$ est l'aire du disque avec frontière C_ε . (Pour une preuve de ce résultat, voir [FRYe, Lem. 4.1.25].) Supposons maintenant que \mathbf{F} représente la vitesse d'un fluide et que l'on place une roue à aubes infinitésimale en \mathbf{a} avec son essieu dans la direction \mathbf{n} . Si la roue à aubes tourne à une vitesse de Ω radians par minute, alors la vitesse des lames est de $\Omega \varepsilon$. (Rappelez-vous que les radians sont définis comme la longueur de l'arc divisée par le rayon). Cette valeur doit être égale à la valeur moyenne de la vitesse des lames dans le sens de la rotation. Puisque la circonférence de C_ε est de $2\pi \varepsilon$, on a

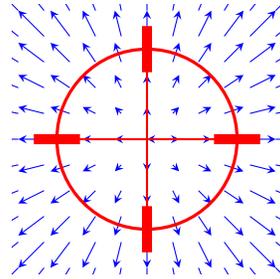
$$\Omega \varepsilon = \frac{1}{2\pi \varepsilon} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \implies \Omega = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n}.$$

Ainsi, notre roue à aubes infinitésimale tourne à la vitesse de $\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n}$ radians par unité de temps. En particulier, pour maximiser la rotation, on doit orienter la roue à aubes de sorte que \mathbf{n} soit parallèle à $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a})$.

Revenons aux champs vectoriels dans les exemples 8.1.8, 8.1.9 et 8.1.10 et considérons notre interprétation de leurs rotationnels.

Exemple 8.1.11. Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$



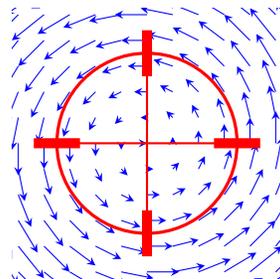
Si ce vecteur représente le flux d'un fluide, alors ce dernier se déplace parallèlement aux lames, et la roue à aubes ne devrait donc pas tourner du tout. En effet, on a

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \implies (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{k} = 0,$$

comme prévu. △

Exemple 8.1.12. Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$



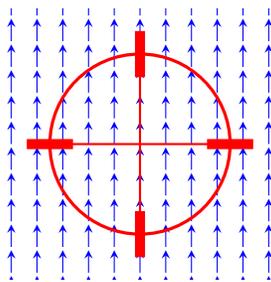
Dans ce cas, le fluide tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La roue à aubes doit donc également tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Elle devrait donc avoir une vitesse angulaire positive. En effet, on a

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{k} \implies (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{k} = 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 2 > 0,$$

comme prévu. △

Exemple 8.1.13. Considérez le champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j}.$$



Dans ce cas, le fluide pousse les lames de droite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et les lames de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre, avec la même force. La roue ne devrait donc pas tourner. En effet, on a

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \implies (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{k} = 0,$$

comme prévu. △

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §4.1]: Q1–Q13.

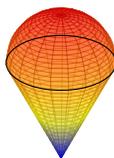
8.2 Théorème de la divergence

Le théorème de divergence (également appelé théorème de Green-Ostrogradski ou théorème de flux-divergence) relie une intégrale triple sur un solide V à une intégrale de surface sur la surface (la frontière) de V . Tout d'abord, commençons par quelques définitions sur le type de surfaces que nous considérons.

Définition 8.2.1. (a) Une surface est *lisse* si elle possède une paramétrisation $\Phi(u, v)$ de classe C^1 telle que tous les points sont réguliers, c'est-à-dire que $\Phi_u \times \Phi_v \neq \mathbf{0}$ partout.

(b) Une surface est *lisse par morceaux* si elle est une réunion finie de surfaces lisses qui se rencontrent le long de courbes.

Exemple 8.2.2. La forme d'un cône de crème glacée



est lisse par morceaux, mais pas lisse, puisqu'elle présente une « courbure aiguë » là où la demi-sphère (la crème glacée) rencontre le cône. \triangle

Rappelez-vous de la Section 1.1 que ∂A désigne la frontière d'un ensemble A . Ainsi, si V est un solide borné, alors ∂V désigne la surface de V .

Théorème 8.2.3 (Théorème de la divergence). *Supposons que V est un solide borné dont la frontière ∂V est lisse par morceaux, et que \mathbf{F} est un champ de vecteurs de classe C^1 sur V . On donne à ∂V une orientation vers l'extérieur (c'est-à-dire qu'on choisit des vecteurs normaux pointant vers l'extérieur de V). Alors*

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Proof. Pour une démonstration de ce théorème, voir [FRYe, Th. 4.2.2]. Étant donné l'interprétation physique de la divergence dont on a parlé dans la Section 8.1.2, le théorème de la divergence ne devrait pas être surprenant. L'intégrale de droite

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

totalise la divergence pour tous les points du solide V . Pour tous les points à l'intérieur de V , le flux sortant d'une petite sphère est annulé par le flux entrant dans les sphères voisines. Ainsi, ce qui nous reste est le flux net sortant de la frontière, qui est l'intégrale de gauche

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad \square$$

Comme dans le théorème fondamental du calcul intégral, le théorème de la divergence énonce que l'intégrale de la dérivée d'une fonction (ici la « dérivée » est la divergence) sur une région solide donnée est égale à l'intégrale de la fonction sur la frontière de cette région. Lorsqu'on utilise le théorème de la divergence, on choisira toujours l'orientation vers l'extérieur pour la surface d'une région solide.

Exemple 8.2.4. Considérez la boule

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

et le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Comparons les deux côtés du théorème de la divergence et vérifions qu'ils sont égaux. La frontière ∂V de V est la sphère unitaire, qu'on a paramétrisé par

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi).$$

Comme on l'a calculé dans l'Exemple 7.7.1, on a

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = (-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, -\sin \varphi \cos \varphi).$$

Comme on l'a également noté dans l'Exemple 7.7.1, il s'agit d'une orientation vers l'intérieur, il faut donc ajouter un signe négatif, puisque le théorème de divergence suppose une orientation vers l'extérieur. (On peut aussi inverser θ et φ , puisque $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = -\Phi_\varphi \times \Phi_\theta$). On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot (\Phi_\theta \times \Phi_\varphi) &= (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 0) \cdot (-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, -\sin \varphi \cos \varphi) \\ &= -\cos^2 \theta \sin^3 \varphi - \sin^2 \theta \sin^3 \varphi \\ &= -\sin^3 \varphi \\ &= (\cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= - \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} && \text{(because of the reversed orientation)} \\ &= - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \\ &= -2\pi \int_0^\pi (\cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_1^{-1} (u^2 - 1) \, du && (u = \cos \varphi, \, du = -\sin \varphi \, d\varphi) \\ &= 2\pi \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_{u=1}^{-1} \\ &= 2\pi \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

D'une autre part, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 2,$$

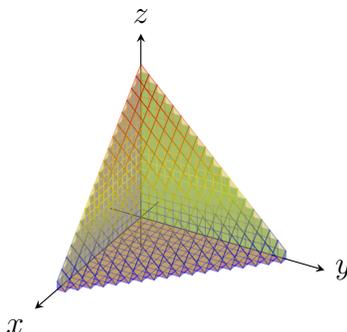
et donc

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_V 2 \, dV = 2 \operatorname{Vol}(V) = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}. \quad \triangle$$

D'où, les deux côtés sont égaux.

Exemple 8.2.5. Considérez le solide

$$V = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, \, x + y + z \leq 1\}$$



et le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz).$$

La frontière ∂V a 4 composantes :

$$\begin{aligned}\Phi_1(u, v) &= (u, v, 0), & u, v \geq 0, \quad u + v \leq 1, \\ \Phi_2(u, v) &= (u, 0, v), & u, v \geq 0, \quad u + v \leq 1, \\ \Phi_3(u, v) &= (0, u, v), & u, v \geq 0, \quad u + v \leq 1, \\ \Phi_4(u, v) &= (u, v, 1 - u - v), & u, v \geq 0, \quad u + v \leq 1.\end{aligned}$$

Ces composantes ont pour vecteurs normaux :

$$\begin{aligned}\Phi_{1u} \times \Phi_{1v} &= (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1), & \text{(negative orientation)} \\ \Phi_{2u} \times \Phi_{2v} &= (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0), & \text{(positive orientation)} \\ \Phi_{3u} \times \Phi_{3v} &= (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0), & \text{(negative orientation)} \\ \Phi_{4u} \times \Phi_{4v} &= (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1). & \text{(positive orientation)}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbf{F}(\Phi_1(u, v)) \cdot (\Phi_{1u} \times \Phi_{1v}) = (uv, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

$$\mathbf{F}(\Phi_2(u, v)) \cdot (\Phi_{2u} \times \Phi_{2v}) = (0, 0, uv) \cdot (0, -1, 0) = 0,$$

$$\mathbf{F}(\Phi_3(u, v)) \cdot (\Phi_{3u} \times \Phi_{3v}) = (0, uv, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0,$$

$$\mathbf{F}(\Phi_4(u, v)) \cdot (\Phi_{4u} \times \Phi_{4v}) = (uv, v(1 - u - v), u(1 - u - v)) \cdot (1, 1, 1) = u + v - uv - u^2 - v^2.$$

et donc

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= - \iint_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\Phi_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Phi_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{\Phi_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + v - uv - u^2 - v^2) dv du \\ &= \int_0^1 \left(u(1-u) + \frac{(1-u)^2}{2} - \frac{u(1-u)^2}{2} - u^2(1-u) - \frac{(1-u)^3}{3} \right) du \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (5u^3 - 9u^2 + 1) du \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{4} - \frac{9}{3} + 1 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

D'une autre part, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = x + y + z,$$

et alors

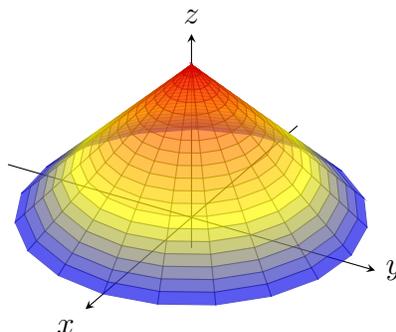
$$\begin{aligned}
 \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z) \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left((x+y)(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x^2-2xy-y^2) \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left((1-x^2)(1-x) - x(1-x)^2 - \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 (x^3 - 3x + 2) \, dx \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}. \quad \triangle
 \end{aligned}$$

D'où, les deux côtés sont égaux.

Le théorème de la divergence peut également être utilisé pour simplifier certaines intégrales de surface, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 8.2.6. Considérez le cône orienté vers le haut suivant

$$C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = (1-z)^2\}$$



et le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, -xy, 1 - xz).$$

Notez que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} (-xy) + \frac{\partial}{\partial z} (1 - xz) = 2x - x - x = 0.$$

Par conséquent, par le théorème de la divergence,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

pour toute surface *fermée*, lisse par morceaux S (c'est-à-dire, toute surface S qui est la frontière d'un solide borné). Fermons le cône en y ajoutant la base

$$B = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

orientée vers le bas. Alors $V = C \cup B$ est une surface fermée, et donc

$$\iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 \implies \iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ainsi, on a transformé notre intégrale sur C en une intégrale sur B , ce qui est plus facile à calculer ! On paramétrise B par

$$\Phi(u, v) = (u, v, 0), \quad (u, v) \in D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

On a

$$\Phi_u \times \Phi_v = (0, 0, 1),$$

qui est opposé à l'orientation de B . Puisque

$$\mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) = (u^2, -uv, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1,$$

on a alors

$$\iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_\Phi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D 1 \, du \, dv = \text{Aire}(D) = \pi. \quad \triangle$$

Avertissement 8.2.7. Dans le théorème de la divergence, il est crucial que \mathbf{F} soit de classe C^1 en *tout* point de V . Par exemple, le théorème de divergence n'est pas satisfait pour

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \quad V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

où $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Notez que \mathbf{F} n'est pas défini à l'origine, qui est contenue dans V . Voir [FRYe, Exemple 4.2.7] pour plus de détails.

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §4.2]: Q1–Q34.

8.3 Le théorème de Green

Notre prochain théorème est le théorème de Green (aussi connu sous le nom du théorème de Green-Riemann), qui relie l'intégrale de la dérivée d'une fonction à valeurs vectorielles sur une région du plan à une intégrale curviligne sur la frontière de celle-ci. Tout d'abord, examinons quelques propriétés des courbes, dont certaines ont déjà été abordées auparavant. Une bonne référence pour le matériel de cette section est [FRYe, §4.3].

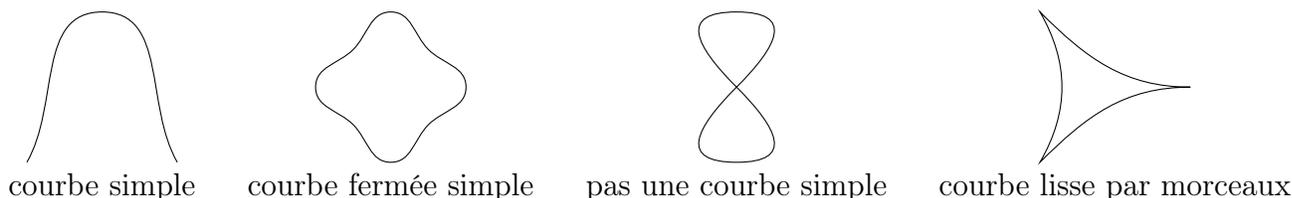
Définition 8.3.1. Soit $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, une paramétrisation d'une courbe C .

- (a) La courbe C est *fermée* si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.
- (b) La courbe C est *simple* si elle ne se croise pas. Plus précisément, C est simple si, pour tout $a \leq t_1, t_2 \leq b$ satisfaisant $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, on a

$$t_1 = t_2 \quad \text{ou} \quad (t_1 = a, t_2 = b) \quad \text{ou} \quad (t_1 = b, t_2 = a).$$

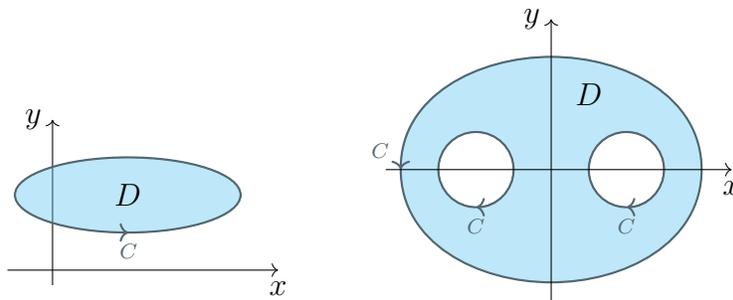
- (c) La courbe C est *lisse par morceaux* si elle a un paramétrisation $\mathbf{r}(t)$ qui
 - (i) est continue et qui
 - (ii) est différentiable sauf éventuellement en un nombre fini de points avec
 - (iii) la dérivée étant continue et non nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple 8.3.2. Voici quelques exemples de courbes :



△

Théorème 8.3.3 (Théorème de Green). *Supposons que D est une région bornée du plan xy et que sa frontière C est constituée d'un nombre fini de courbes fermées simples et lisses par morceaux, orientées chacune de telle sorte que si l'on la parcourt dans le sens de l'orientation, D se trouve toujours à notre gauche.*



De plus, supposons que $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ est un champ de vecteurs de classe C^1 sur D . Alors

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Remarques 8.3.4. (a) Rappelez-vous que \oint_C est une notation alternative pour \int_C qui est parfois utilisée lorsque C est une courbe fermée (ou une réunion de courbes fermées).

(b) Rappelez-vous que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ est le *scalaire rotationnel* de \mathbf{F} . Il s'agit de la composante z du rotationnel de \mathbf{F} si on étend \mathbf{F} à un champ de vecteurs en trois dimensions avec une composante z nulle. Voir (5.3).

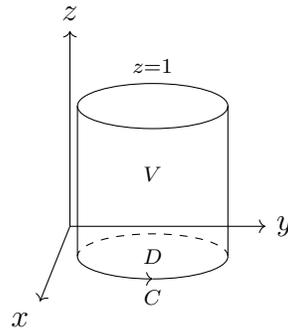
(c) On écrit parfois

$$\oint_C (F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy) \quad \text{for} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Démonstration du Théorème 8.3.3. On utilisera le théorème de divergence (Théorème 8.2.3) pour prouver le théorème de Green. On définit

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$\mathbf{G}(x, y, z) = F_2(x, y)\mathbf{i} - F_1(x, y)\mathbf{j}.$$



Par le théorème de la divergence, on a

$$\iint_{\partial V} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{G} dV. \quad (8.1)$$

Le côté droit de (8.1) est

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{G} dV &= \iiint_V \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy dz \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy, \end{aligned}$$

qui est le côté droit du théorème de Green.

Calculons maintenant le côté gauche de (8.1). La frontière, ∂V , de V est la réunion de

- le haut plat, avec vecteur normal \mathbf{k} ,
- la base plate, avec vecteur normal $-\mathbf{k}$,
- surface latérale S_L tracé par la courbe C quand on la déplace de $z = 0$ à $z = 1$.

Puisque $\mathbf{G} \cdot \mathbf{k} = 0$, on a

$$\iint_{\partial V} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{haut}} \mathbf{G} \cdot \mathbf{k} dS + \iint_{\text{base}} \mathbf{G} \cdot (-\mathbf{k}) dS + \iint_{S_L} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_L} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}.$$

Pour calculer l'intégrale sur S_L , il faut la paramétrer. Supposons que

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b,$$

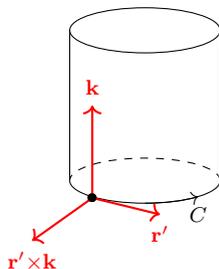
est une paramétrisation de C . Alors

$$\Phi(t, z) = \mathbf{r}(t) + z\mathbf{k} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

est une paramétrisation de S_L . On a

$$\Phi_t \times \Phi_z = (x'(t), y'(t), 0) \times (0, 0, 1) = \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{k} = y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}.$$

En utilisant la règle de la main droite, on voit que cela donne un vecteur normal orienté vers l'extérieure.



Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_L} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_a^b \int_0^1 \mathbf{G}(\Phi(t, z)) \cdot (\Phi_t \times \Phi_z) dz dt \\ &= \int_a^b \int_0^1 (F_2(x, y), -F_1(x, y), 0) \cdot (y'(t), -x'(t), 0) dz dt \\ &= \int_a^b \int_0^1 (F_2(x, y)y'(t) + F_1(x, y)x'(t)) dz dt \\ &= \int_a^b (F_2(x, y)y'(t) + F_1(x, y)x'(t)) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

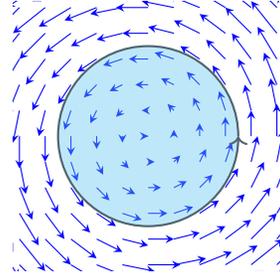
C'est précisément le côté gauche du théorème de Green. □

Exemple 8.3.5. Considérez le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

et le disque unitaire

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



La frontière du disque est le cercle unitaire, qu'on peut paramétrer par

$$\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Notez que l'orientation de cette courbe est bonne (c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). On obtient alors

$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Ainsi, le côté gauche du théorème de Green est

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

D'une autre part, le côté droit du théorème de Green est

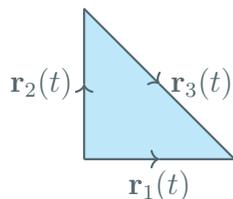
$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \text{ Aire}(D) = 2\pi.$$

Par conséquent, le théorème de Green est vérifié. \triangle

Exemple 8.3.6. Soit D le triangle avec sommets aux points $(0, 0)$, $(0, 1)$, et $(1, 0)$. Vérifions le théorème de Green sur D pour

$$\mathbf{F}(x, y) = (x, y).$$

On paramétrise la frontière C de D par



$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= (t, 0), & t \in [0, 1], & \mathbf{r}'_1(t) = (1, 0), \\ \mathbf{r}_2(t) &= (0, t), & t \in [0, 1], & \mathbf{r}'_2(t) = (0, 1), \\ \mathbf{r}_3(t) &= (t, 1-t), & t \in [0, 1], & \mathbf{r}'_3(t) = (1, -1). \end{aligned}$$

Notez que les segments $\mathbf{r}_2(t)$ et $\mathbf{r}_3(t)$ sont orientés dans la direction opposée. Donc on doit ajouter un signe négatif devant les termes correspondants. Ainsi le côté gauche du théorème de Green est

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{r}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^1 (t, 0) \cdot (1, 0) dt - \int_0^1 (0, t) \cdot (0, 1) dt - \int_0^1 (t, 1-t) \cdot (1, -1) dt \\ &= \int_0^1 t dt - \int_0^1 t dt - \int_0^1 (t-1+t) dt \\ &= -[t^2 - t]_{t=0}^1 = 0. \end{aligned}$$

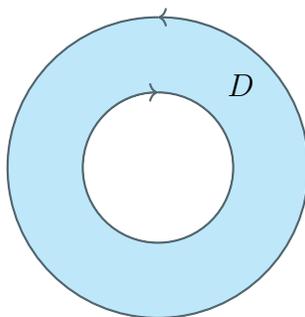
D'une autre part, le côté droit du théorème de Green est

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

Par conséquent, le théorème de Green est vérifié. △

Exemple 8.3.7. Considérez le champ vectoriel et région suivants

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) &= \left(-ye^{x^2+y^2}, xe^{x^2+y^2} \right), \\ D &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \in [1, 4]\}. \end{aligned}$$



La frontière ∂D est constituée de deux cercles :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(\theta) &= (\cos \theta, \sin \theta), & \theta &\in [0, 2\pi], & \text{(orientation opposée)} \\ \mathbf{r}_2(\theta) &= (2 \cos \theta, 2 \sin \theta), & \theta &\in [0, 2\pi]. & \text{(bonne orientation)} \end{aligned}$$

On a

$$\mathbf{r}'_1(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad \mathbf{r}'_2(\theta) = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta),$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(\theta)) \cdot \mathbf{r}'_1(\theta) &= (-e \sin \theta, e \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) = e, \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(\theta)) \cdot \mathbf{r}'_2(\theta) &= (-2e^4 \sin \theta, 2e^4 \cos \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta) = 4e^4. \end{aligned}$$

Donc, le côté gauche du théorème de Green est

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_0^{2\pi} e \, d\theta + \int_0^{2\pi} 4e^4 \, d\theta = 8\pi e^4 - 2\pi e.$$

Calculons maintenant le côté droit du théorème de Green. La rotationnel scalaire de \mathbf{F} est de

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (xe^{x^2+y^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (-ye^{x^2+y^2}) \\ &= e^{x^2+y^2} + 2x^2e^{x^2+y^2} + e^{x^2+y^2} + 2y^2e^{x^2+y^2} = 2(1+x^2+y^2)e^{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

En utilisant les coordonnées polaires, on a

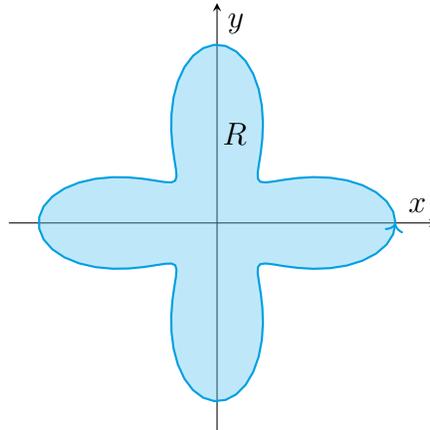
$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 2(1+r^2)e^{r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^4 (1+u)e^u \, du \, d\theta \quad (u = r^2, \, du = 2r \, dr) \\ &= \int_0^{2\pi} [ue^u]_{u=1}^4 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (4e^4 - e) \, d\theta = (4e^4 - e)2\pi = 8\pi e^4 - 2\pi e. \end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème de Green est vérifié. \triangle

Le théorème de Green peut être utilisé pour calculer l'aire des régions bornées par des courbes, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 8.3.8. Soit R la région bornée par la courbe

$$\mathbf{r}(t) = ((2 + \cos 4t) \cos t, (2 + \cos 4t) \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Si on choisit un champ vectoriel \mathbf{F} avec un rotationnel scalaire

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1,$$

alors, d'après le théorème de Green, on aurait

$$\text{Aire}(R) = \iint_R 1 \, dx \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Prenons $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$, qui satisfait en effet $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Donc

$$\begin{aligned} \text{Aire}(R) &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 + \cos 4t)(\cos t) \left((2 - 4 \sin 4t) \sin t + (2 + \cos 4t) \cos t \right) dt \\ &= \frac{9\pi}{2}, \end{aligned}$$

où la dernière intégrale a été calculée en utilisant des techniques du calcul intégral en une variable. (On a omis les détails de ce dernier calcul). \triangle

Avertissement 8.3.9. Dans le théorème de Green (Théorème 8.3.3), il est essentiel que \mathbf{F} soit de classe C^2 sur *tout* D . Par exemple, pour

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

l'égalité du théorème de Green *n'est pas* vraie. Notez que \mathbf{F} n'est pas défini à l'origine, qui fait partie de D . Pour plus de détails, voir [FRYe, Exemples 4.3.7, 4.3.8].

Exercices.

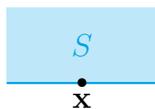
Exercices tirés de [FRYd, §4.3]: Q1–Q25.

8.4 Théorème de Stokes

Notre dernière variante du théorème fondamental du calcul intégral est le théorème de Stokes (parfois appelé théorème de Stokes-Cartan), qui est une version tridimensionnelle du théorème de Green. Il relie une intégrale sur une surface de \mathbb{R}^3 à une intégrale sur la courbe délimitant celle-ci.

Avant d'énoncer le théorème de Stokes, on introduit quelques terminologies et conventions. Supposons que S soit une surface orientée lisse par morceaux dans \mathbb{R}^3 . Rappelez-vous que cela signifie qu'on a « choisi un côté » de S . Plus précisément, on a choisi un vecteur normal unitaire en chaque point de S de manière continue. Dans la Définition 1.1.6, on a défini la frontière de S comme étant l'ensemble des points tels que toute boule autour du point contient des points de S et des points qui ne sont pas dans S . Selon cette définition, la frontière de la plupart des surfaces est la surface entière en soi, ce qui n'est pas ce que

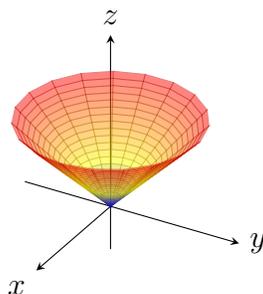
nous voulons pour le théorème de Stokes. Ainsi, on dit qu'un point $\mathbf{x} \in S$ est un *point de la frontière* si, en zoomant de près, il ressemble à ceci :



(Cette définition peut être rendue plus précise avec un travail supplémentaire, mais les frontières seront évidentes pour tous nos exemples). Alors la *frontière*, ∂S , de S est l'ensemble de tous ses points de la frontière. Bien qu'à présent on ait utilisé la notation ∂S pour désigner deux types différents de frontières, la signification devrait être claire à partir du contexte. Par exemple, lorsqu'on parle de la frontière d'une surface dans \mathbb{R}^3 , on utilise la nouvelle définition introduite dans cette section.

Exemple 8.4.1. Pour le cône

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1]\}$$

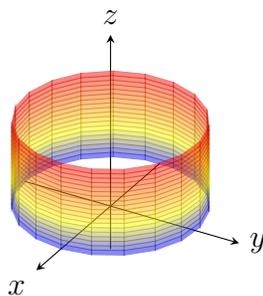


on a

$$\partial S = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 1\}. \quad \triangle$$

Exemple 8.4.2. Pour le cylindre

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$$

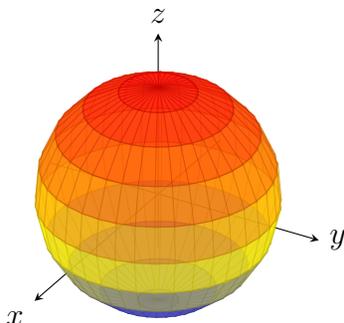


on a

$$\partial S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in \{0, 1\}\}. \quad \triangle$$

Exemple 8.4.3. Pour la sphère

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$



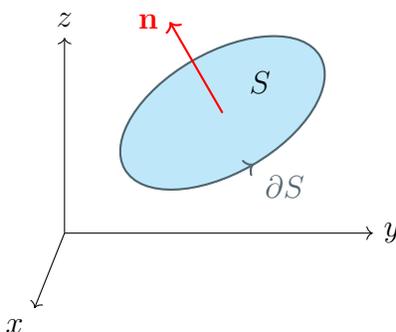
on a $\partial S = \emptyset$.

△

On s'intéressera plus particulièrement aux surfaces dont les frontières sont des réunions finies de courbes de courbes lisses, simples et fermées. On a besoin d'une convention pour l'orientation de ces frontières. Pour le théorème de Green (Théorème 8.3.3), on a orienté la frontière de telle sorte que, lorsque vous marchez le long de la courbe en suivant l'orientation, la surface se trouve à gauche. Essentiellement, on veut la même convention pour les surfaces dans \mathbb{R}^3 , sauf qu'il faut maintenant préciser où se trouvent vos pieds et votre tête lorsque vous marchez !

Convention 8.4.4. Si S est une surface orientée et lisse par morceaux dans \mathbb{R}^3 dont la frontière ∂S est une réunion finie de courbes lisses par morceaux, simples et fermées, alors on oriente la frontière de telle sorte que

- si on marche le long de ∂S dans la direction de l'orientation de ∂S ,
- avec le vecteur de vos pieds à votre tête ayant la même direction que le vecteur normal choisi \mathbf{n} pour S (donnant donc son orientation),
- alors S est à votre gauche.



Théorème 8.4.5 (Théorème de Stokes). *Supposons que S est une surface orientée lissée par morceaux et bornée dont la frontière ∂S est une réunion finie de courbes lisses par morceaux, simples et fermées, et avec une orientation choisie selon la Convention 8.4.4. Supposons également que \mathbf{F} est un champ de vecteurs de classe C^1 sur S . Alors*

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Proof. Pour une preuve du théorème de Stokes, voir [FRYe, Th. 4.4.1]. La preuve implique une réduction au théorème de Green ; voir la Remarque 8.4.6 suivante. \square

Remarque 8.4.6. Supposez que \mathbf{F} ait une composante z nulle, soit $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$, et que la surface S est située dans le plan xy , de sorte que l'on ait

$$S = \{(x, y, 0) : (x, y) \in D\}$$

pour un certain $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Ensuite, en utilisant (5.3), on a

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dS = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Par conséquent, dans cette situation, le théorème de Stokes se réduit au théorème de Green.

Exemple 8.4.7. Vérifions le théorème de Stokes pour

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, xy, 0), \quad S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Puisque $\partial S = \emptyset$, le côté gauche du théorème de Stokes est $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot ds = 0$. Il faut donc vérifier que le côté droit est également nul. On paramétrise S , qui est la sphère unitaire, à l'aide des coordonnées sphériques :

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Comme on l'a calculé dans l'Exemple 7.7.1, on a

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = (-\cos \theta \sin^2 \varphi, -\sin \theta \sin^2 \varphi, -\sin \varphi \cos \varphi).$$

Aussi, on a

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (xy), \frac{\partial}{\partial z} (xy) - \frac{\partial}{\partial x} 0, \frac{\partial}{\partial x} (xy) - \frac{\partial}{\partial y} (xy) \right) = (0, 0, y - x),$$

et donc

$$\text{rot } \mathbf{F}(\Phi(\theta, \varphi)) = (0, 0, \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \varphi).$$

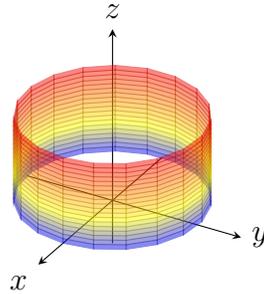
Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{rot } \mathbf{F}(\Phi(\theta, \varphi)) \cdot (\Phi_\theta \times \Phi_\varphi) d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi (\cos \theta - \sin \theta) d\varphi d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi [\sin \theta + \cos \theta]_{\theta=0}^{2\pi} d\varphi \\ &= 0, \end{aligned}$$

tel que prévu. \triangle

Exemple 8.4.8. Vérifions le théorème de Stokes pour

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-e^z y, e^z x, 0), \quad S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}.$$



On paramétrise le cylindre S par

$$\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 1].$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (e^z x), \frac{\partial}{\partial z} (-e^z y) - \frac{\partial}{\partial x} 0, \frac{\partial}{\partial x} (e^z x) - \frac{\partial}{\partial y} (-e^z y) \right) \\ &= (-e^z x, -e^z y, 2e^z) \end{aligned}$$

et

$$\Phi_\theta \times \Phi_z = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

qui correspond à une orientation vers l'extérieur du cylindre. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}(\Phi(\theta, z)) \cdot (\Phi_\theta \times \Phi_z) &= (-e^z \cos \theta, -e^z \sin \theta, 2e^z) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ &= -e^z \cos^2 \theta - e^z \sin^2 \theta = -e^z. \end{aligned}$$

Par conséquent, le côté droit du théorème de Stokes est

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-e^z) d\theta dz = -2\pi [e^z]_{z=0}^1 = 2\pi(1 - e).$$

Pour calculer le côté gauche, on paramétrise les deux bouts (cercles) de la frontière du cylindre :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= (\cos t, \sin t, 1), & t \in [0, 2\pi], & \quad (\text{orientation négative}) \\ \mathbf{r}_2(t) &= (\cos t, \sin t, 0), & t \in [0, 2\pi]. & \quad (\text{orientation positive}) \end{aligned}$$

Le côté gauche du théorème de Stokes est alors

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= - \int_{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt + \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{2\pi} (-e \sin t, e \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= - \int_0^{2\pi} e dt + \int_0^{2\pi} dt \\
&= -2\pi e + 2\pi = 2\pi(1 - e),
\end{aligned}$$

tel que prévu. △

Pour conclure, établissons quelques liens entre le théorème de Stokes et d'autres concepts abordés dans ce document. Supposons que S_1 et S_2 sont deux surfaces orientées ayant la même frontière C avec une orientation choisie selon la Convention 8.4.4. (Notez qu'on suppose que la Convention 8.4.4 appliqué à la fois à S_1 et S_2 donne la même orientation de C). Alors, d'après le théorème de Stoke

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

En d'autres termes, l'intégrale de $\text{rot } \mathbf{F}$ est la même sur S_1 que sur S_2 .

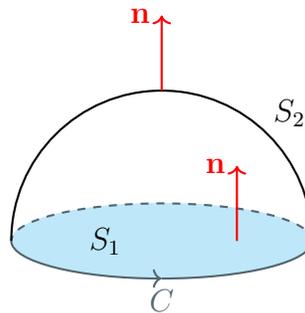
Par exemple, si C est le cercle unitaire

$$C = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$$

orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre vu d'en haut, alors les deux

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} \quad \text{and} \\
S_2 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\},
\end{aligned}$$

avec une orientation vers le haut, ont la même frontière C .



Alors, grâce au théorème de Stokes, nous avons

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.2)$$

En fait, il y a une autre façon de voir pourquoi (8.2) est vraie. Soit

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

soit le solide compris entre S_1 et S_2 . Alors

$$\partial V = S_1 \cup S_2.$$

Notez que le vecteur normal à ∂V pointant vers l'extérieur est \mathbf{n} sur S_2 et $-\mathbf{n}$ sur S_1 . On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\partial V} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \, dV \quad (\text{selon le théorème de la divergence}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé l'identité vectorielle $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ de la Proposition 8.1.6(a).

Remarque 8.4.9. Si \mathbf{F} est un champ vectoriel de classe C^1 sur tout \mathbb{R}^3 et qui satisfait $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ partout, alors le théorème de Stokes implique que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ pour toutes les courbes fermées C . Ainsi, par Théorème 6.5.1, \mathbf{F} est conservatif. Cela donne une preuve alternative du Théorème 6.5.2.

Exercices.

Exercices tirés de [FRYd, §4.4]: Q1–Q28.

Bibliographie

- [FRYa] J. Feldman, A. Rechnitzer, and E. Yeager. *CLP-1 Differential Calculus textbook*. URL: <https://secure.math.ubc.ca/~CLP/CLP1/>.
- [FRYb] J. Feldman, A. Rechnitzer, and E. Yeager. *CLP-3 Multivariable Calculus problem book*. URL: <https://secure.math.ubc.ca/~CLP/CLP3/>.
- [FRYc] J. Feldman, A. Rechnitzer, and E. Yeager. *CLP-3 Multivariable Calculus textbook*. URL: <https://secure.math.ubc.ca/~CLP/CLP3/>.
- [FRYd] J. Feldman, A. Rechnitzer, and E. Yeager. *CLP-4 Vector Calculus problem book*. URL: <https://secure.math.ubc.ca/~CLP/CLP4/>.
- [FRYe] J. Feldman, A. Rechnitzer, and E. Yeager. *CLP-4 Vector Calculus textbook*. URL: <https://secure.math.ubc.ca/~CLP/CLP4/>.
- [Gou59] É. Goursat. *A course in mathematical analysis: Vol 1: Derivatives and differentials, definite integrals, expansion in series, applications to geometry. Vol. 2, Part 1: Functions of a complex variable. Vol. 2, Part 2: Differential equations*. Dover Publications, Inc., New York, 1959. Translated by E. R. Hedrick (Vol. 1), and E. R. Hedrick and O. Dunkel (Vol. 2).
- [MT11] J. E. Marsden and A. Tromba. *Vector Calculus*. WH Freeman, 6th edition, 2011.
- [Nic] W. K. Nicholson. *Linear Algebra with Applications*. URL: <https://lyryx.com/linear-algebra-applications/>.